

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

SZABÁLYOS JOB-FOLYAM PÁROK ÜTEMEZÉSÉNEK
VIZSGÁLATA II.

Irta:

TANKÓ JÓZSEF

Tanulmányok 83/1978.

A kiadásért felelős:
DR VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 070 X
ISSN 0324-2951

Tartalom /~~*/~~/

4. Összefüggő ütemezés	5
4.1. Következetes természetes /KT/ ütemtervek	9
4.1.Ábrák: KT ütemtervek első periódusai	16
4.2.Ábra: Következetes természetes ütemtervek gráfja az első periódus végéig	19
4.3.Ábra: Természetes ütemtervek ciklikus gráfja	22
4.4.Ábra: Konfigurációk tipikus gráfjai	28
4.5.Ábra: Szoros ütemterv nem okvetlen domináns	31
4.1.Táblázat: A lehetséges KT ütemtervek	36
4.2. A konfigurációk redukciói: \mathcal{D}_i -redukciók	45
4.6.Ábra: A redukált konfigurációk terének szemléltetése	49
4.7.Ábra: Az R_{k+1} ütemterv származtatása R_k -ból	79
4.3. \mathcal{D} -redukált konfigurációk KT ütemtervei	85
4.8.Ábra: A \mathcal{D} -redukált konfigurációk tartományai az $/x_1, x_2/ \geq /-\eta_1, -\eta_2/$ alterekben	87
4.2.Táblázat: \mathcal{D} -redukált konfigurációk KT ütemtervei	90
4.3.Táblázat: A 4.2.Táblázat ütemterveinek jellemzői	91
4.4.Táblázat: A /4.5/ egyenlőtlenségek legkisebb $\omega_i \geq /1,0/$ megoldásai \mathcal{D} -redukált konfigurációkra	98
4.9.Ábra: A /4.5/ egyenlőtlenségek megoldásai \mathcal{D} -redukált konfigurációkra $\omega_1^*, \bar{\omega}_2^*$ formában	99
4.5.Táblázat: \mathcal{D} -redukált konfigurációk R_{i0} , $i=1,2$, ütemterveinek jellemzői	102
4.10.Ábra: A \mathcal{D} -redukált konfigurációk tartományai	103
4.11.Ábra: \mathcal{D} -redukált konfigurációk R_{i0} ütemterveinek jellemzői	104
4.4. Összefüggő ütemtervek értékelése	105
4.12.Ábra: Folyamat-diagram a KT ütemtervek értékelésére /KT-Diagram/	108

/~~*/~~/ Az 1.-3. fejezetek és a teljes irodalomjegyzék a "Tanulmányok" előző, 82/1978 köteteként jelentek meg [T7]

4.13.Ábra: A /4.5/ KIF-ek Ω^+ megoldásainak lehetséges hibái	121
4.5. A \mathcal{D}_1 -redukciók és a lánc törtfejtés kapcsolata	140
4.6.Táblázat: Átszámítás a kétféle indexelés között	150
4.7.Táblázat: A $\mathcal{D}=\mathcal{D}_1$ és $\mathcal{D}=\mathcal{D}_2$ -redukciók generált mennyiségek összefüggése	153
5. Megszakító ütemezés	154
5.1. A konfigurációk redukciói: Δ_1 -redukciók	156
5.1.Ábra: Δ -redukált konfigurációk tartományai	163
5.2. Az R_{12} ütemtervek és a Δ -redukció	179
5.2.Ábra: A Δ -redukció hatása az R_{12} ütemtervre	184
5.3. Speciális konfigurációk R_{12} ütemtervei	191
5.3.Ábra: Az $\gamma_1=0, \vartheta_1=0$ speciális konfiguráció R_{12} ütemterve	192
5.4.Ábra: A $\vartheta_1 \gamma_2 > 0, \vartheta_2=0$ speciális konfiguráció R_{12} ütemterve	194
5.4. A $0 < \tau_1^* < \tau_2^*$ eset vizsgálata	205
5.5.Ábra: A $0 < \tau_1^* < \tau_2^*, \vartheta_1^* > 0$ tartomány	206
5.6.Ábra: A ϑ_1' maradék tartományai az M-szakaszok végén	211
5.7.Ábra: Redukált konfigurációk speciális tartományai az 5.17.-5.20.Lemmákban	227
5.8.Ábra: Az $R^* \rightarrow R''$ transzformáció és R'	233
5.5. Az R_{12} ütemtervek hatékonyságának meghatározása	254
5.6. A különböző redukciók és prioritásos ütemtervek kapcsolata	260
5.9.Ábra: Δ_1 -redukált konfigurációk tartományai	261
5.1.Táblázat: Példa a Δ^k operátorok manifesztációjára	269
Irodalom	272

4. Összefüggő ütemezés.

Ebben a fejezetben kizárólag összefüggő ütemtervekkel foglalkozunk. Az előző fejezetben láttuk /3.2. Tétel/, hogy a természetes ütemtervek dominánsak az összefüggő ütemtervek osztályában. Ezért kizárólag természetes ütemterveket kell tekintenünk.

A 4.1. pontban a következőket természetes /KT/ ütemtervekkel foglalkozunk. Bebizonyítjuk, hogy ezek egy jelentéktelen különleges eset kivételével mindig periodikusak /4.1. Tétel/. A KT ütemtervek hatékonyságát ezért a 3.5. Lemma szerint egyszerűen számíthatjuk ki egy periódus P_A -foglaltságából. Ez a tény azért fontos, mert a KT ütemtervek osztálya összefüggő-domináns /4.2. Tétel/. Ebből következik az, hogy az összefüggő-optimális ütemtervek egy különleges /de érdektelen, mert $\eta = 0$ / eset kivételével mindig periodikusak. Az összefüggő-domináns KT ütemtervek osztálya igen korlátozott számú elemből áll /maximum hat/ és maximum három lényegében azonossági osztályból /4.2. Lemma/. Ez lehetővé teszi azok teljes áttekintését és jellemzőik meghatározását. Megmutatjuk, hogy az összes KT ütemterv jellemzőit a $0 \leq B_i \tau_i - A_i \tau_{3-i} \leq \eta$, $i=1,2$, egyenlőtlenségek legkisebb, /1, η -nál nem kisebb megoldásai határozzák meg. Ennek módját a 4.3. Tételbe foglaljuk. Ennek keretében a 4.1. Táblázatban teljes áttekintést adunk a lehetséges KT ütemtervek típusairól az egész \mathbb{Q} konfigurációtérben. A 4.1. pont a 4.4. Tétellel zárul, amely az R_{10} összefüggő prioritásos ütemtervek jellemzőit szolgáltatja.

A 4.2. pontban a KT ütemtervek jellemzőinek meghatározására egy alternatív módszert fejlesztünk ki, a \mathcal{D} -redukciós módszert, amely lehetővé teszi a KT ütemtervek sajátosságainak magyarázatát a konfiguráció paramétereinek tulajdonságai segítségével.

E tulajdonság a paraméterek egymáshoz való viszonyára vonatkozik. Ez a viszony analóg a számok racionális összefüggőségével, illetve egészek közös osztójukban meghatározott viszonyával.

Bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció / a különleges, de érdektelen $\eta=0$ eset kivételével/ egy \mathcal{D} operátor véges sokszori alkalmazásával transzformálható egy $Q_v \in \mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{Q}$ redukált konfigurációba, amelynek KT ütemtervei szoros kapcsolatot mutatnak a Q konfiguráció KT ütemterveivel. Ugyanakkor a Q_v ütemterveinek jellemzői könnyen meghatározhatók. A Q és Q_v konfigurációk paramétereinek összefüggését egy $\underline{\tau}_v = \underline{D}\underline{\tau}$ lineáris transzformáció fejezi ki, ahol $\underline{\tau}$ vektor a τ_1 és $-\tau_2$ komponensekből áll /4.7. Lemma/. A \underline{D} mátrix segítségével megadható a Q és Q_v konfigurációk KT ütemtervei jellemzői közötti összefüggések /4.5. Tétel/. A \mathcal{D} -redukciónak /amely a \mathcal{D} operátor alkalmazása a redukált konfiguráció meghatározására/ szemléletes értelmezése van a KT ütemtervek Gantt-diagramján /4.5. Tétel 1. Megjegyzés/. A \mathcal{D} operátor hatását a $0 \leq B_i \tau_i - A_i \tau_{3-i} \leq \eta$ egyenlőtlenség $\omega_i^* \geq 1,0$ legkisebb megoldására ill. annak hibájára a 4.8. Lemma fejezi ki.

A 4.3. pontban a \mathcal{D} -redukált konfigurációk KT ütemterveinek jellemzőivel foglalkozunk, amelyre a \mathcal{D} -redukciós módszernél van szükségünk bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció KT ütemterveinek értékelésekor. A \mathcal{D} -redukált $Q \in \mathcal{Q}_0$ konfigurációk KT ütemterveinek jellemzőit a 4.6. Tétel keretében táblázatosan adjuk meg a teljes \mathcal{Q}_0 térre vonatkozóan, amelyet 25 résztartományra bontunk: 14 résztartományban az $\eta_1, \vartheta_1, \eta_2, \vartheta_2$ paraméterek legalább egyike 0 /elfajulás/; a többi 11 résztartomány között is van 4-nél alacsonyabb dimenziós.

A tartományokat a paraméterek Q terének sík-soraival szemléltethetjük, amelyekben az $x_i = \vartheta_i - \eta_{3-i}$, $i=1,2$, koordinátákat merőleges tengelyeken ábrázoljuk. Az R_{i0} , $i=1,2$, összefüggő prioritásos ütemtervek jellemzőit ilyen ábrázolásban a 4.11. Ábrákon szemléltetjük /4.7. Tétel/.

A D -redukció és a D -redukált konfigurációk ütemterveinek értékelése után a 4.5. Tétel lehetővé teszi az eredeti Q konfiguráció KT ütemterveinek értékelését. Ezt és a $0 \leq B_i \tau_i - A_i \tau_{3-i} \leq \eta$ egyenlőtlenség megoldásán alapuló alternatív módszert állítjuk párhuzamba a 4.4. pontban az összefüggő ütemtervek értékelésére vonatkozólag. A KT ütemtervek értékelésének eredményeként megtaláljuk az összefüggő-optimális ütemtervet és megkapjuk annak jellemzőit, hatékonyságát. Sajnos olyan általános kritériumot az optimális ütemterv kiválasztására, amely sem a szóbanforgó egyenlőtlenségek megoldását, sem a D -redukciót nem igényelné, általában nem tudunk adni. Tehát közvetlenül Q paramétereivel $R(Q)$ KT ütemterve jellemzőit általában nem adhatjuk meg. Ilymódon az optimális ütemtervet sem választhatjuk ki. Ez analóg azzal a megállapítással, hogy két tetszőleges a, b egész szám $d=(a,b)$ legnagyobb közös osztóját nem adhatjuk meg a és b függvényeként anélkül, hogy az euklideszi algoritmust el ne végeznénk. Az algoritmus szolgáltatja adatok segítségével azonban $d=pa+qb$ egyenletben a p, q együtthatók meghatározhatók /l. pl. [K10] /. Természetesen $R_1(Q) \approx R_2(Q)$ esetén $\vartheta_1(Q) = \vartheta_2(Q)$, így a két KT ütemterv egyforma hatékonyságú. Ezért elegendő csupán a maximálisan három lényegében azonossági osztály egy-egy R reprezentánsának $\vartheta_R(Q)$ hatékonyságát meghatározni, hogy az optimális ütemtervet kiválasszuk.

Ez a tény növeli a 4.8. Tétel jelentőségét, amely az $R_{10}(Q)$ összefüggő prioritásos ütemtervek hatékonysága viszonyára ad meg meghatározó kritériumokat.

A pont további részében a Δ -Algoritmust adjuk a KT ütemtervek értékelésének egyik módszeréhez szükséges $0 \leq B_i \tau_i - A_i \tau_{3-i} \leq \eta$, $i=1,2$, egyenlőtlenség-pár legkisebb $\omega_i^* \geq 1,0$ megoldásainak egyszerre történő megtalálásához. A D -redukció végrehajtására és a Q_v redukált konfiguráció, valamint a D mátrix generálására a D -Algoritmust adjuk meg. Ezen alapszik a KT ütemtervek értékelésének másik módszere. Ennek jelentősége indokolja az algoritmus számításigényének becslését, amely arányos a Q konfiguráció v D -összetettségi fokával. Több alternatív becslést adunk a v összetettségi fokra a Q paraméterei és maximum a DQ operáció generálta első két $\ell_{i,0}$, $i=1,2$, hányados segítségével. Néhány becslés a D -redukció generálta (A) és (B) egész sorozatok és az (F) Fibonacci-féle számsor összefüggésén /4.11. Lemma/ alapszik.

Az utolsó 4.5. pontban a $\xi_0 = \tau_1 / \tau_2$ lánc törtfejtése útján generált nem-teljes hányadosok (b) sorozata és a D -redukció generálta (ℓ) hányadossorozat kapcsolatával foglalkozunk. A $0 \leq B_i \tau_i - A_i \tau_{3-i} \leq \eta$ egyenlőtlenségek megoldása két koincidencia feladat megoldását jelenti, amellyel a 2. Fejezetben foglalkoztunk. Láttuk ott, hogy a megoldás a lánc törtfejtés módszerén alapszik. Ez magyarázza azt, hogy a D -redukció és a lánc törtfejtés euklideszi algoritmusuk szoros kapcsolatban vannak. E kapcsolat feltárását a 4.5. pontban a 4.12. Lemma keretében végezzük el. A pontot a D_1 és D_2 -redukció generálta sorozatok kapcsolatára vonatkozó megállapításokkal zárjuk.

4.1. Következetes természetes /KT/ ütemtervek

A megszakításos ütemezések dominálják az összefüggő ütemezéseket, hiszen minden összefüggő ütemezés egyben egy speciális megszakításos ütemezés. Ennek ellenére az összefüggő ütemezések osztálya fontos. Gyakorlatilag azért, mert sokszor a processzor "elvétele" kiszolgálás közben normális körülmények között lehetetlen /destruktív megszakítás/, az addigi kiszolgálás elvesztését jelenti /preempt-repeat/, vagy nagy járulékos veszteséget okoz /overhead time/.

Egy általános $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció esetén a lehetséges összefüggő ütemtervek halmaza még ésszerű szűkítések után is elég nagy számosságú lehet. A 3.2. Tétel szerint ebben a természetes ütemtervek osztálya domináns. A 3.5. Tétel sokat elárul ennek az osztálynak a tulajdonságairól. Többek között azt, hogy mikor kettő és mikor több-elemű. Igen könnyű belátni, hogy ha kettőnél több-elemű, akkor megszámlálhatóan végtelen számosságú. Az alábbiakban látni fogjuk, hogy az osztály ilyenkor is dominálható véges elemszámú részosztállyal, a következetes természetes /KT/ ütemtervek osztályával. Ez a tény igen egyszerűen fog adódni a 3.4. pont eredményeiből. Csupán egyetlen észrevételre van még szükség, ami a következetes természetes ütemtervek számos tulajdonságának kulcsa.

Ez a kulcsmegállapítás a következő: bármely kritikus döntés után előfordul a $t'_a = \eta_a$, $a=1,2$, pontokban fellépő szituációk valamelyike. E két szituáció jellegzetessége, hogy a P_A processzoron éppen egy A -task befejeződik és a másik két processzor is szabad.

Kulcsmegállapításunkat egyszerű belátni a lehetséges kritikus szituációkban a lehetséges kritikus döntések eredményének elemzésével.

Legyen $R \in \mathcal{R}^{(Ta)}$ egy természetes ütemterv /T-ütemterv/, $a=1,2$.

Egy $\sigma_0[t]$ kritikus szituációban s_i döntés után egy A_i -task fog végződni a $t + \eta_i$ pontban és ott minden processzor szabad lesz. De ugyanez a szituáció feltétlenül az $\mathcal{R}^{(Ti)}$ osztály elemeinek $t'_i = \eta_i$ pontjában is. E tényt szimbolikusan így fejezhetjük ki:

$$\begin{aligned} s(\sigma_0[t]) &= s_i \text{ döntés eredménye a} \\ \sigma^{(i)}[t + \eta_i] &= \sigma^{(i)} \text{ szituáció, ahol} \\ /4.1/ \quad \sigma^{(a)} &\doteq \sigma^{(a)}[\eta_a] = \begin{cases} / \beta_a /, & \text{ha } \tau_a = 0 \text{ vagy } \vartheta_a > 0, 0 \leq \eta_{3-a} \leq \vartheta_a \\ \sigma_0, & \text{ha } \eta_a > 0, \vartheta_a = 0 \\ \sigma_{3-a,0}, & \text{ha } 0 < \vartheta_a < \eta_{3-a}, \end{cases} \end{aligned}$$

$a=1,2$, az $R \in \mathcal{R}^{(a)}$ ütemtervek szituációja. Itt $\sigma^{(a)}$ arra utaló jelölés, hogy $\sigma^{(a)}$ az s_a döntés eredményeként kapott szituáció, és a $/ \beta_a /$ jelölés azt jelzi, hogy a szituáció nem kritikus és az egyértelműen meghatározott s_{3-a} domináns döntés eredménye β_a -szituáció. $\tau_a = 0$ esetben az egyértelműséget a 2. Megállapodás eredményezi az egyébként σ_0 szituációban. A σ_0 kritikus szituációkra vonatkozóan tehát kulcsmegállapításunk igaz.

Legyen $\sigma'[t] = \sigma_{i,0}$ az R egy kritikus szituációja a t pontban. Ha a döntés s_i , akkor a $t + \eta_i$ pontban egy A_i -task végződik és minden processzor szabad. Vagyis

$$\sigma^{(i)}[t + \eta_i] = \sigma^{(i)}$$

ismét teljesül, függetlenül az $s(0) = s_a$ első döntéstől.

Ha a döntés $s(\sigma_i^{(0)}[t]) = s_0$, akkor a P_A processzor tétlen lesz a $[t, t + \beta^{(3-i)}(t))$ intervallumon, amelyben azonban az ütemezés meghatározott, beleértve a $t' = t + \beta^{(3-i)}(t)$ pontot is. Itt a döntés $s[t'] = s_{3-i}$, vagyis egy A_{3-i} -task /összefüggő/ ütemezése. A $t' + \eta_{3-i}$ pontban egy A_{3-i} -task végződik és a többi processzor is szabad. A szituáció megegyezik a /4.1/ szituációval, ahol most $a=3-i$. Formálisan

$$\sigma^{(0)}[t + \eta_{3-i} + \beta^{(3-i)}(t)] = \sigma^{(3-i)}.$$

Ezzel kulcsmegállapításunkat igazoltuk. E megállapítást és közvetlen következményeit fejezi ki az alábbi lemma.

4.1. Lemma: Tetszőleges $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció természetes ütemterveire vonatkozóan igazak az alábbiak:

- /i/ Bármelyik kritikus szituáció után η időn belül fellép valamelyik /4.1/ alatti $\sigma^{(a)}$, $a=1,2$, szituáció;
- /ii/ Bármelyik kritikus szituáció értéke csak a létező σ_1' , vagy σ_2' lehet /kivéve a $\sigma_0[0]$ első szituációt/;
- /iii/ Bármelyik határozott szakasz részben kongruens az egyik első határozott szakasszal;
- /iv/ A két első határozott szakaszon kívül legfeljebb négyféle határozott szakasz lehetséges; ezek száma annyszor kettővel csökken, ahány /legfeljebb kettő/ teljesül az alábbi öt feltétel közül:

$$\begin{aligned} & \sigma_i' \text{ nem létezik, } i=1,2, \\ /4.2/ \quad & \sigma_i' = \sigma_0, \quad i=1,2 \\ & \sigma_1' = \sigma_2' \neq \sigma_0/. \end{aligned}$$

Bizonyítás: /i/ azonos a kulcsmegállapításunkkal, amelyet már igazoltunk. Az /ii/ és /iii/ következik /i/-ből és a 3.12. Lemma /3/ állításából.

/iv/ állítás igazolása: Az /i/ állítás következtében a határozott szakaszok csak a kezdeti $[t, t' + \eta_a)$ szakaszaikon különbözhetnek valamelyik első határozott szakasztól, ahol t az alsó határpont a δ'_1 vagy δ'_2 alsó határszituációval és a kritikus döntés olyan, hogy egy A_a -task ütemeződik először, a t' pillanatban. Mivel az ütemezésnek ez a szakasza is a határszituáció és kritikus döntés által egyértelműen meghatározott, maximálisan négyféle lehet a kétféle szituáció és szituációnként kétféle döntésnek megfelelően. Ha δ'_1 kritikus szituáció nem létezik, akkor a 3.14. Lemma szerint $\mathcal{R}^{(i)}$ egyetlen R_{10} ütemterv, amelynek nincs kritikus szituációja, ezért maga egyetlen első határozott szakasz. Ilymódon /a másik $\mathcal{R}^{(3-i)}$ osztályban/ csak a δ'_{3-i} kritikus szituáció léphet fel és maximálisan két határozott szakaszt generálhat a két lehetséges kritikus döntés révén. Ha δ'_{3-i} sem létezik, csak a két első határozott szakasz van: maguk az R_{10} és $R_{3-i,0}$ ütemtervek. Ha $\delta'_{3-i} = \delta'_0$, akkor itt a két döntés nem generál újfajta határozott szakaszt, csupán a két első másolatát. Ha δ'_1 és δ'_2 egyaránt léteznek, de egyik, vagy mindkettő δ'_0 , akkor ugyanígy két-két újabb határozott szakasz lehetősége szűnik meg. Végül, ha $\delta'_1 = \delta'_2$, akkor a két kritikus szituációban a lehetséges két kritikus döntés is azonos és a generálható határozott szakaszok száma kettőre csökken. Azonban ez is csak akkor lesz új, ha $\delta'_1 = \delta'_2 \neq \delta'_0$, különben a két első határozott szakasz generálódik.

Q.e.d.

Ez a lemma nem tartalmaz feltételeket arra nézve, hogy a különféle lehetőségek közül mely esetben melyik következik be. A feltételeket a 3.4. pont eredményeiből összegyűjthetnénk, azonban ezt csak hivatkozás nélkül fogjuk megtenni a későbbiekben. Az alábbi fontos tételhez - egy kivételével - ezekre a feltételekre nincs szükség.

4.1. Tétel: Tetszőleges $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció következetes természetes ütemtervei periódikusak, kivéve az

/4.3/ $\eta=0$, $\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 > 0$ és $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ racionálisan függetlenek különleges esetet.

Bizonyítás: Bármelyik $R \in \mathcal{R}^{(a)}(Q)$ KT ütemtervénél három lehetőséget különböztethetünk meg az alábbiak szerint. A bizonyítást ezekre külön-külön végezzük el.

1.eset: R -nek nincs kritikus szituációja. Ekkor $R=R_{a0}$, amely a 3.5. Tétel /C/ állítása szerint a /4.3/ esetben nem, egyébként azonban mindig periodikus.

2.eset: $\delta'_a = \delta_0$. A következetesség miatt itt ismét az s_a döntésnek kell lennie és a 3.12. Lemma /2/ állítása szerint az elsővel kongruens határozott szakasznak kell kezdődnie, amelynek felső határszituációja újra δ_0 . Indukcióval adódik, hogy R -nek csak δ_0 kritikus szituációi vannak és periodikus. Periodusa az első határozott szakasza /4.1/ (a) Ábra/.

3.eset: $\delta'_a = \delta_{i,0}$, $i=1,2$. Itt kétféle döntés lehetséges. Az egyik a $\delta^{(a)}$, a másik a $\delta^{(3-a)}$ szituációt generálja, amelyet /4.1/ formula ad meg. Az első esetben a felső határszituáció ismét a δ'_a , amelyben a következetesség miatt a döntés már meghatározott.

Ezért R periodikus lesz az első határozott szakasszal, pontosabban a két $\delta^{(a)}$ előfordulás közötti szakasszal, mint periodussal /4.1/(b) Ábrák $i=a$ és $i=3-a$ esetére/.

A második esetben a felső határszituáció a δ'_{3-a} kritikus szituáció lesz, ha ilyen létezik. Ha nem létezik, akkor R lényegében azonos az $\mathcal{R}^{(3-a)}$ osztály egyetlen elemével, az $R_{3-a,0}$ ütemtervvel. Ez periodikus a 3.5. Tétel /C/ szerint.

Ha δ'_{3-a} létezik, erre ugyanazok a lehetőségek, mint a δ'_a esetén fentebb sorravett esetek. Ha $\delta'_{3-a} = \delta'_0$, akkor itt az s_a döntés a következetesség miatt meghatározott és R periodikus lesz az első két határozott szakasszal, pontosabban ismét a két $\delta^{(a)}$ közötti szakasszal, mint első periodussal /4.1/(c/1) és (c/2) Ábrák/.

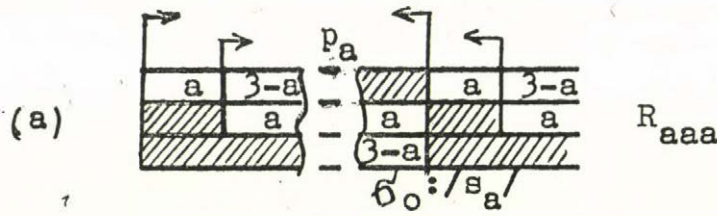
Ha $\delta'_{3-a} = \delta'_a$ /ez típus és érték szerinti azonosságot jelent!/, akkor a következetesség miatt itt ismét az s_a döntést kell hozni, amit a δ'_a szituációban hoztunk, vagyis ismét a második határozott szakaszt δ'_{3-a} felső határszituációval fogja generálni. Ezért R periodikus a második határozott szakasszal, mint periodussal /4.1/(d) Ábrák/. Ha azonban $\delta'_{3-a} \neq \delta'_a$ /ami nem zárja ki, hogy azonos típusúak legyenek!/, akkor itt még két döntési lehetőség marad. Egyik a δ'_a , másik a δ'_{3-a} felső határszituációval rendelkező szakaszt generálja /azonos típusu δ'_{3-a} és δ'_a esetén a 4.1/(d) és (e) Ábrák, eltérő típusu δ'_{3-a} és δ'_a esetén a 4.1/(f) és (g) Ábrák mutatják a lehetőségeket/. Bármelyik esetben a döntés a következetesség miatt meghatározott. δ'_a generálásakor a periodus alapja az első és második határozott szakasz /4.1/(e) és (f) Ábrák/. δ'_{3-a} generálásakor a periodus alapja a második határozott szakasz /4.1/(d) és (g) Ábrák/. Ezzel az összes lehetséges kritikus szituáció-kombinációt megvizsgáltuk.

Q.e.d.

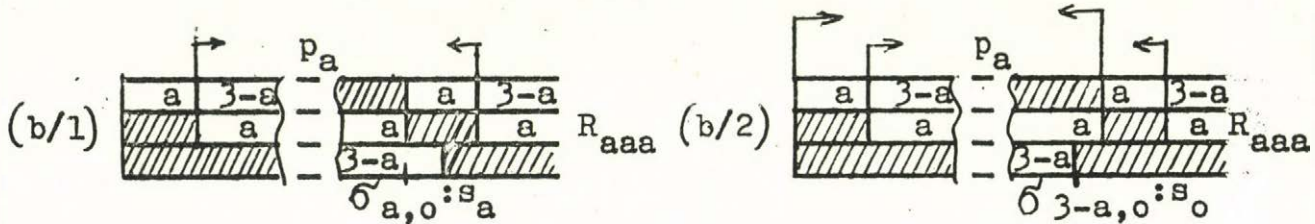
Ez a bizonyítás teljesen logikai, a 4.1. Ábrák csupán szemléltetik az egyes kombinációs lehetőségeket. Ezekre, valamint az ábrákban szereplő összefüggésekre később is hivatkozni fogunk. Természetesen egy konkrét $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációnál nem az összes 4.1. Ábrán sorravett eset léphet fel. Alternatívát csak kritikus döntéssel teremtünk, annak eredménye azonban egyértelműen meghatározott a Q által, bár annak jellege függ Q -tól. Az esetek szemléletesebb összefoglalására a 4.2. Ábrán egy gráf segítségével is bemutatjuk a lehetőségeket. Abban a csúcsok szituációkat, az élek rákövetkezéseket jelentenek. Amikor a lehetséges utakat döntésekkel választhatjuk meg, az éleket a döntéssel címkézzük. A többi él közül ténylegesen a Q konfiguráció paraméterértékei határozzák meg. A gráf a lehetséges ütemterveket az első periodusok végéig mutatja, ha van kritikus szituáció. A fa ágai alatt az (x/n) jelzések a 4.1. Ábrákra utaló címkék.

A 4.2. Ábráról leolvasható, hogy egy adott $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációnál a KT ütemtervek száma erősen korlátozott. Vagyis az $\mathcal{R}^{(a)}$ következetes természetes /az $\mathcal{R}^{(Ta)}$ következetes/ elemeinek száma meghatározott véges. Nevezetesen: az elemek száma minimálisan egy /ha nincs kritikus szituáció, vagy az δ_0 / és maximálisan három /pl. $\delta_0 \xrightarrow{s_a} \delta_{a,0} \xrightarrow{s_0} \delta_{3-a,0}$ bekövetkezése esetén - többek között/. Könnyű belátni, hogy - bár az $\mathcal{R}^{(a)}$ és $\mathcal{R}^{(3-a)}$ KT ütemtervei nem függetlenek - az összes $\mathcal{R}^{(T)}$ -beli következetes elemek száma minimálisan kettő és maximálisan hat.

Ezt a tényt egy lemma formájában is megfogalmazzuk.

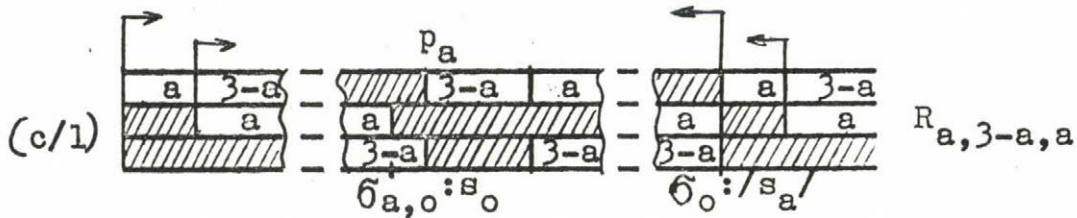


$$p_a = \mu_a \tau_a = \mu_{3-a} \tau_{3-a} + \eta_a, \quad \Delta'_a = \eta_a$$



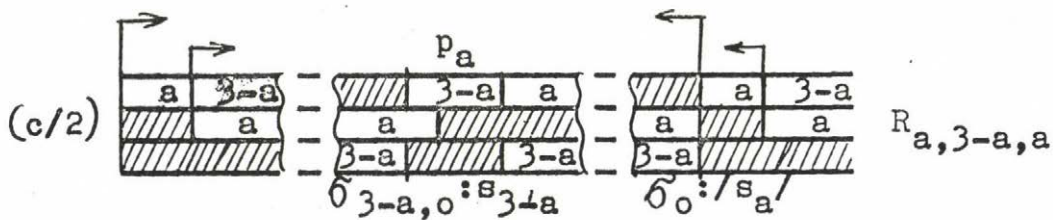
$$p_a = \mu_a \tau_a = \mu_{3-a} \tau_{3-a} + \varepsilon_{3-a} \eta_a, \quad 0 \leq \varepsilon_{3-a} < 1, \quad \Delta'_a = \varepsilon_{3-a} \eta_a$$

$$p_a = \mu_a \tau_a = \mu_{3-a} \tau_{3-a} + \eta_a + \varepsilon'_a \eta_{3-a}, \quad 0 < \varepsilon'_a < 1, \quad \Delta'_a = \eta_a + \varepsilon'_a \eta_{3-a}$$



$$p_a = \mu_a \tau_a + \eta_{3-a} + \varepsilon'_{3-a} \eta_a = \mu_{3-a} \tau_{3-a} + \eta_a$$

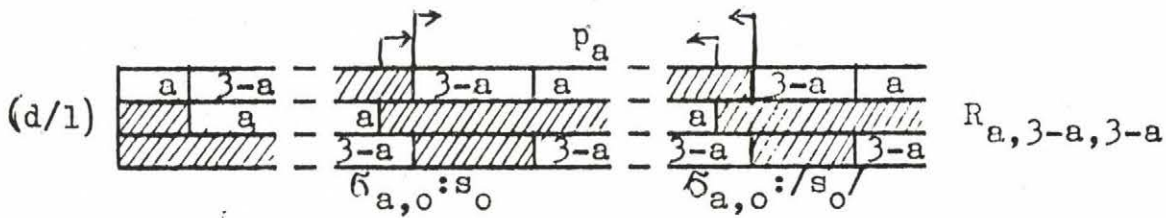
$$0 < \varepsilon'_{3-a} < 1, \quad \Delta'_a = 1 - \varepsilon'_{3-a} / \eta_a, \quad \Delta'_{3-a} = \eta_{3-a}$$



$$p_a = \mu_a \tau_a + \varepsilon_a \eta_{3-a} = \mu_{3-a} \tau_{3-a} + \eta_a$$

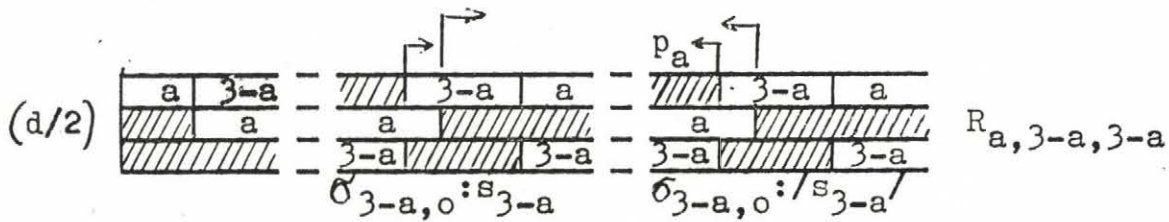
$$0 \leq \varepsilon_a < 1, \quad \Delta'_a = \eta_a + 1 - \varepsilon_a / \eta_{3-a}, \quad \Delta'_{3-a} = \eta_{3-a}$$

4.1/(a),(b),(c) Ábrák: KT ütemtervek első periodusai



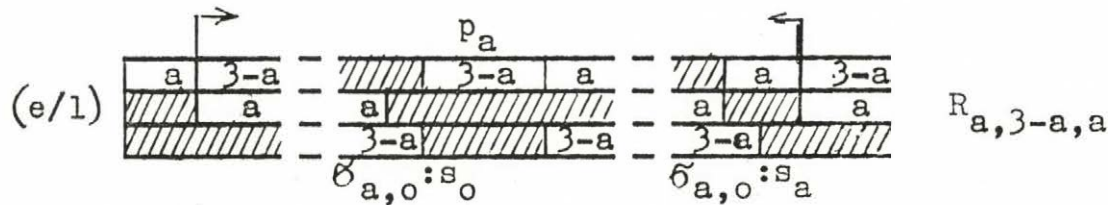
$$p_a = \mu_a \tau_a + \eta_{3-a} + \varepsilon'_{3-a} \eta_a = \mu_{3-a} \tau_{3-a}$$

$$0 < \varepsilon'_{3-a} < 1, \quad \Delta'_{3-a} = \eta_{3-a} + \varepsilon'_{3-a} \eta_a$$



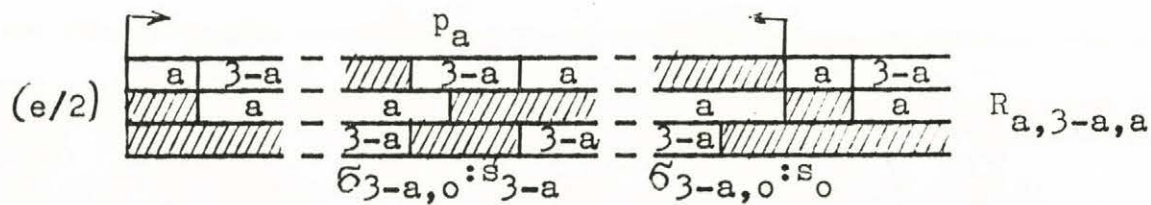
$$p_a = \mu_a \tau_a + \varepsilon_a \eta_{3-a} = \mu_{3-a} \tau_{3-a}$$

$$0 \leq \varepsilon_a < 1, \quad \Delta'_{3-a} = \varepsilon_a \eta_{3-a}$$



$$p_a = \mu_a \tau_a + \eta_{3-a} + \varepsilon'_{3-a} \eta_a = \mu_{3-a} \tau_{3-a} + \varepsilon_{3-a} \eta_a$$

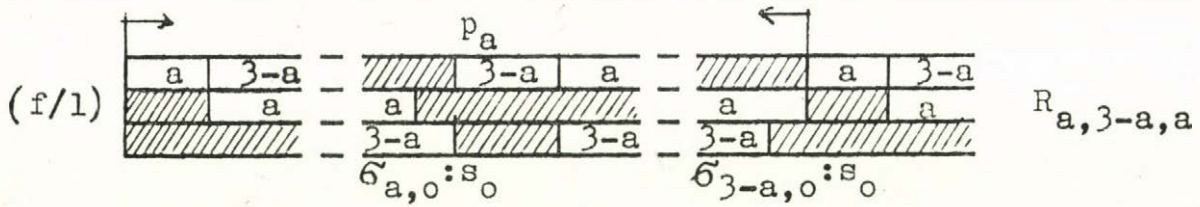
$$0 < \varepsilon'_{3-a} < 1, \quad 0 \leq \varepsilon_{3-a} < 1, \quad \Delta'_a = /1 - \varepsilon'_{3-a} / \eta_a, \quad \Delta'_{3-a} = \eta_{3-a} + /1 - \varepsilon_{3-a} / \eta_a$$



$$p_a = \mu_a \tau_a + \varepsilon_a \eta_{3-a} = \mu_{3-a} \tau_{3-a} + \eta_a + \varepsilon'_a \eta_{3-a}$$

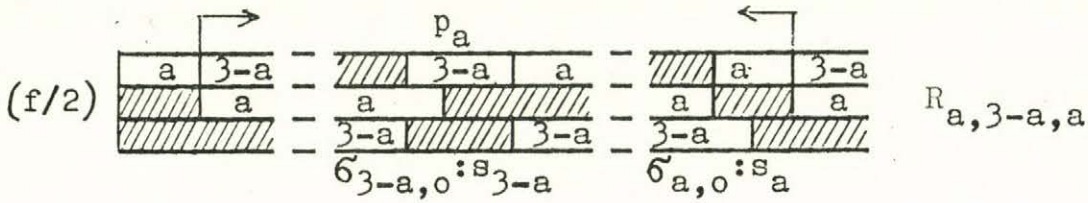
$$0 \leq \varepsilon_a < 1, \quad 0 < \varepsilon'_{3-a} < 1, \quad \Delta'_a = \eta_a + /1 - \varepsilon_a / \eta_{3-a}, \quad \Delta'_{3-a} = /1 - \varepsilon'_a / \eta_{3-a}$$

4.1/(d),(e) Ábrák: KT ütemtervek első periodusai



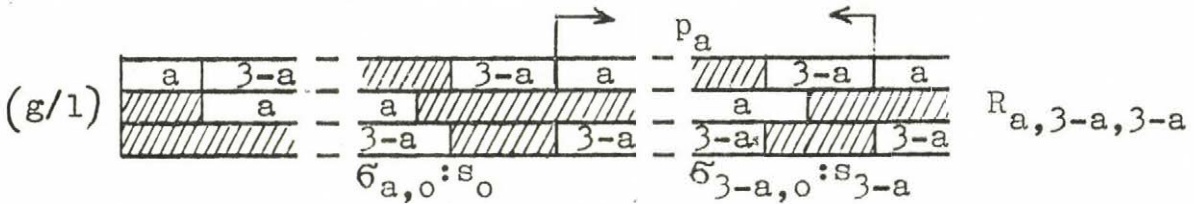
$$p_a = \mu_a \tau_a + \eta_{3-a} \varepsilon'_{3-a} = \mu_{3-a} \tau_{3-a} + \eta_a \varepsilon'_a$$

$$0 < \varepsilon'_{3-a} < 1, 0 < \varepsilon'_a < 1, \Delta'_a = 1 - \varepsilon'_{3-a} / \eta_a, \Delta'_{3-a} = 1 - \varepsilon'_a / \eta_{3-a}$$



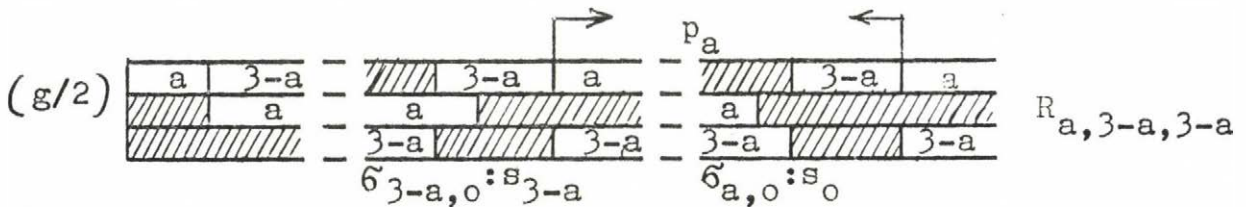
$$p_a = \mu_a \tau_a + \varepsilon_a \eta_{3-a} = \mu_{3-a} \tau_{3-a} + \varepsilon_{3-a} \eta_a$$

$$0 \leq \varepsilon_a < 1, 0 \leq \varepsilon_{3-a} < 1, \Delta'_a = \eta_a + 1 - \varepsilon_a / \eta_{3-a}, \Delta'_{3-a} = \eta_{3-a} + 1 - \varepsilon_{3-a} / \eta_a$$



$$p_a = \mu_a \tau_a + \varepsilon_a \eta_{3-a} = \mu_{3-a} \tau_{3-a}$$

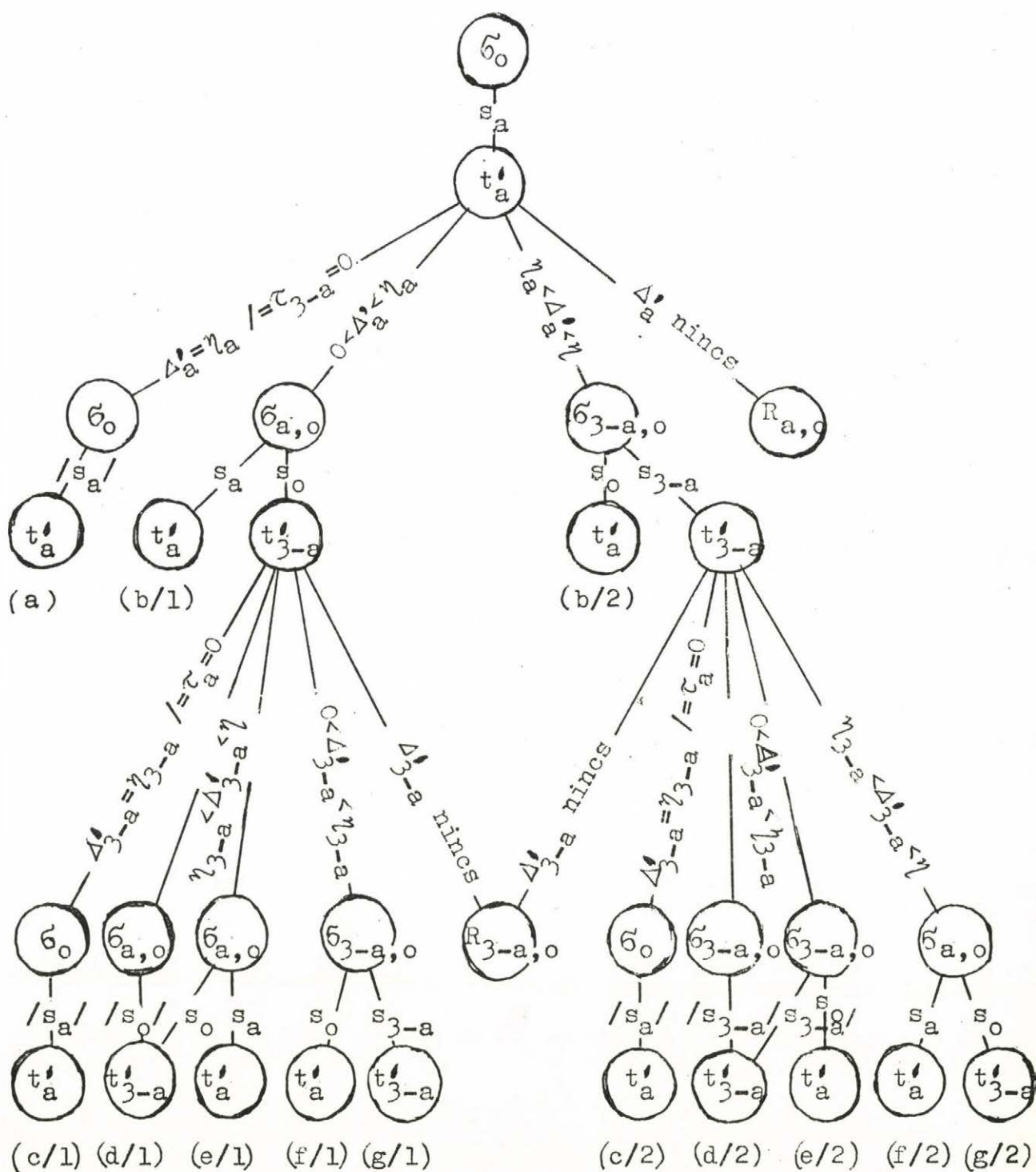
$$0 \leq \varepsilon_a < 1, \Delta'_{3-a} = \varepsilon_a \eta_{3-a}$$



$$p_a = \mu_a \tau_a + \eta_{3-a} \varepsilon'_{3-a} = \mu_{3-a} \tau_{3-a}$$

$$0 < \varepsilon'_{3-a} < 1, \Delta'_{3-a} = \eta_{3-a} + \varepsilon'_{3-a} \eta_a$$

4.1/(f),(g) Ábrák: KT ütemtervek első periodusai



4.2. Ábra: Következőes természetes ütemtervek gráfja az első
periodus végéig

4.2. Lemma: Egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció összes lehetséges következetes természetes ütemterveinek száma Q paramétereinek értéke által meghatározott és $s(o) = s_a$, $a=1,2$, mindkét első döntés mellett minimum egy és maximálisan három, összesen minimum kettő és maximum hat különböző lehet. Ezek legfeljebb három lényegében azonossági osztályba tartoznak, minden osztályban legfeljebb két elemmel, amelyek első $s(o)$ döntése különböző.

Bizonyítás: A lemma első részét, az ütemtervek számára vonatkozóan, már beláttuk. Ami azok lényegében különbözőségét illeti csak azt kell meggondolni, hogy valahányszor alternatív döntés van, az egyik a $6^{(1)}$, a másik a $6^{(2)}$ szituációra vezet. E kettő közül egyik éppen az ellentétes $s(o)$ döntéssel kezdődő ütemtervekkel közös, ahol minden következetes folytatási lehetőség képviselve van, így az a változat is, amelyik ütemtervről éppen szó van. Ütemtervünk tehát azzal a változattal lényegében **azonos**. Ha nincs alternatív döntési lehetőség akkor viszont az ütemterv egyértelműen meghatározott $s(o)$ döntés által és a másik $R^{(Ta)}$ osztályban lehet, vagy nem, vele lényegében azonos ütemterv. Ennek megfelelően valóban lehetséges egy, kettő, vagy három lényegében azonossági osztály, egyenként egy vagy két elemmel.

Q.e.d.

Már a 4.2. Ábra élein feltüntettük a megfelelő szituáció-rákövetkezések feltételeit a /3.11/ egyenlőtlenség $\omega'_a \geq 1,0$ legkisebb megoldásának Δ'_a hibája segítségével, amely a 3.14. Lemma eredményein alapul. A 4.2. Ábrán látható fa azonban nem szemlélteti az ütemtervek végtelen voltát és a ciklusok egymáshoz kapcsolódását. A 4.1. Lemma szerint a természetes ütemtervekben csak néhány határozott szakasz ismétlődhet, ezért lehetséges a végtelen ütemtervet véges sok csúcsot és élet tartalmazó ciklikus gráffal is ábrázolni.

Ez látható a 4.3. Ábrán. A ciklikus gráf szemlélteti az összes lehetséges $R^{(T)}$ -beli ütemtervet egyszerre a határozott szakaszok, illetve a jellegzetes szituációk rákövetkezései segítségével. A gráfban a csúcsok szituációkat, az élek rákövetkezéseket reprezentálnak. A $\sigma^{(i)}$ szituáció lehet nem kritikus, amikor a β_i szituáció követi, vagy lehet kritikus szituáció, amikor egybeesik a σ_i^* jellegzetes szituációval. Ezt fejezik ki a $\sigma^{(i)}$ -ből kimenő nyilak. A σ_i^* csúcs valójában csak egy fiktív szituáció, amely a belőle kiinduló nyilak végén található szituációk valamelyikét képviseli. Az élek mentén megadtuk a rákövetkezés feltételeit; vagy a paraméterekkel közvetlenül, vagy a /3.18/ egyenlőtlenség legkisebb $\omega_a^* \geq 1,0$ megoldásának Δ_a^* hibája segítségével. A kritikus szituációkból kivezető élek a kritikus döntéseknek felelnek meg.

Két fontos megjegyzést teszünk itt.

/i/ A σ_0 szituációban az s_1 és s_2 döntések lehetőségét degenerált esetben korlátozhatja a 2. Megállapodás. Ennek figyelembevételével is érvényes a gráf.

/ii/ A $\sigma_{1,0}$ vagy $\sigma_{2,0}$ kritikus szituációk egy $Q \in Q$ konfigurációnál jelképezhetnek két különböző értékű, de azonos típusú σ'_1 és σ'_2 kritikus szituációt is.

A gráf csúcsait körrel és/vagy négyzettel kereteztük. Átmenet egy "körös" csúcsból "négyzetesbe", vagy viszont, olyan szituációba érést jelent, amely az $R^{(T1)}$ és $R^{(T2)}$ közül a másik osztály elemének is szituációja. Ilyenkor a két osztályban vannak lényegében azonos elemek.

Állítjuk, hogy tetszőleges $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció esetén a 4.3. Ábrán a σ_0 szituációból elindulva az élek mentén feltüntetett feltételek és döntések szerint haladva az összes lehetséges természetes ütemezés menete végigkövethető. Ehhez azt kell bebizonyítanunk, hogy a feltüntetett feltételek helyesek. Ezt egy lemma formájában végezzük el.

4.3. Lemma: Természetes ütemtervekben a jellegzetes szituációk rákövetkezési feltételeit a 4.3. Ábrán lévő ciklikus gráf élei mentén feltüntetett feltételek adják meg.

Bizonyítás: A bizonyítás kissé hosszadalmas, mert meg kell vizsgálni az összes lehetséges konfigurációváltozatot. Szimmetria folytán elegendő a gráf egyik /alsó/ felét tekinteni. Tegyük fel először, hogy egy R természetes ütemterv az s_1 döntéssel kezdődik. A $\sigma_0 \xrightarrow{s_1} \sigma^{(1)}$ ut nyilván helyes. A $\sigma^{(1)}$ akkor és csak akkor nem kritikus szituáció, ha $0 \leq \eta_2 \leq \eta_1$ és $\eta_1 > 0$. Ilyenkor $\sigma^{(1)}$ -et a β_1 -szituáció követi. Minden egyéb esetben, vagyis $0 \leq \eta_1 < \eta_2$ és $\eta_1 = \eta_2 = 0$ esetekben, $\sigma^{(1)}$ a σ_1^* kritikus szituáció. Így a $\sigma^{(1)} \rightarrow \beta_1$ és $\sigma^{(1)} \rightarrow \sigma_1^*$ utak feltételei helyesek. A további utak feltételeiben a

$$/*/ \quad 0 \leq \Delta_1 \leq \eta$$

/3.18/ egyenlőtlenség megoldása játszik döntő szerepet, amelynek $\omega_1 \geq 1,0$ minimális megoldását ω_1^* és annak hibáját Δ_1^* jelöli, feltéve, hogy megoldás létezik.

$0 \leq \vartheta_1 < \eta_2$ vagy $\vartheta_1 = \eta_2 = 0$ esetben a $/*/$ megoldása $\omega_1^* = 1,0$ a $\Delta_1^* = \eta_1$ hibával.

A $6^{(1)} \rightarrow 6_1^*$ él feltételei mellett tehát Δ_1^* mindig létezik. Ezenkívül a 6_1^* csúcsba a β_1 -ből jutunk, ha Δ_1^* a $0 \leq \eta_2 \leq \vartheta_1 > 0$ feltétel mellett létezik.

A $/*/$ egyenlőtlenségnek két esetben nincs megoldása: /4.3/ különleges esetben és a $\vartheta_1 > 0, \tau_2 = 0$ degenerált esetben. Mindkét esetben $R = R_{10}$, hiszen a 3.14. Lemma szerint nincs kritikus szituáció, mert a /3.11/ egyenlőtlenségnek sincsen $\omega_a' \geq 1,0$ megoldása. A 3.5. Tétel szerint az első esetben R_{10} nem periodikus, a második esetben azonban igen. A továbbiakban e két esetet kizárjuk, mint elintézett eseteket. Minden egyéb esetben van ω_1^* megoldás. Ilyenkor a 4.3. Ábra grájában a $6^{(1)}_1$ csúcsból valamelyik úton a 6_1^* csúcsba jutunk. Vegyük sorra a lehetséges konfiguráció-típusokat.

Először a 3.1. Táblázat szerinti elfajult eseteket tekintjük.

$\tau_1 = \tau_2 = 0$ degenerált esetben $\Delta_1^* = 0 = \eta_1$ létezik /de $\Delta_1^* = \tau_2 = 0$ is igaz/, ezért a gráf a 6_0 csúcsba vezet. Valójában az σ_1 nulla ütemtervekben a 6_0 szituáció tér vissza és ott kell felváltva az s_1 és s_2 döntéseket hozni a 2. Megállapodás szerint.

$\eta_1 > 0$, $\vartheta_1 = 0$ esetben mindig $\omega_1^* = /1,0/$ és $\Delta_1^* = \eta_1$ ezért a $\delta_1^* \rightarrow \delta_0$ átmenet adódik az ábrában. Ez helyes, hiszen a $t_1' = \eta_1$ pontban a δ_0 kritikus szituáció tér vissza.

$\tau_1 = 0$, $\tau_2 > 0$. degenerált esetben is $\omega_a^* = /1,0/$ a megoldás, amelyre $\Delta_a^* = 0 = \eta_1$ a

$\delta_1^* \rightarrow \delta_0$ rákövetkezést jelöli ki helyesen, hiszen a δ_0 állapot azonnal visszatér a

C_1 -ciklus ütemezése után a $t_1' = \eta_1 = 0$ pontban. Itt a 2. Megállapodás az s_2 döntést írja elő.

$\eta = 0$, $\vartheta_1, \vartheta_2 > 0$ és ϑ_1, ϑ_2 racionálisan összefüggők esetben $/**/$ alakja $\Delta_1 = 0$ egyenlet, amelynek legkisebb pozitív megoldása a δ_0 szituáció első visszatérését határozza meg és az ábra helyesen a $\delta_1^* \rightarrow \delta_0$ átmenetet mutatja, hiszen $\Delta_1^* = 0 = \eta_1$.

$\eta > 0$, $\tau_1, \tau_2 > 0$ esetekben a $/**/$ -nak mindig van megoldása. Ha $\Delta_1^* = \eta$ és ω_1^* nem megoldása a $/3.11/$ egyenlőtlenségnek, akkor a 3.15. Lemma szerint a $\delta_1^* \rightarrow \delta_1^{(2)}$ átmenet helyes. Ha $\Delta_1^* = \eta$, akkor ω_1^* csak $\eta_2 = 0$ mellett lehet a $/3.11/$ -nek is megoldása a 3.2. Táblázat szerint. Ekkor azonban

$\Delta_1^* = \Delta_1' = \eta_1$ és a 3.14. Lemma szerint a $\delta_1^* \rightarrow \delta_0$ átmenet helyes. Ha $0 < \Delta_1^* < \eta$, akkor ω_1^* biztosan megoldása a $/3.11/$ -nek is a 3.2. Táblázat és 3.16. Lemma szerint. A 3.14. Lemma szerint azonban δ_1^* kritikus szituáció és $\Delta_1' = \Delta_1^*$ mellett valóban $\delta_1^* \rightarrow \delta_{1,0}$, ha $0 < \Delta_1^* < \eta_1$, $\delta_1^* \rightarrow \delta_0$, ha $\Delta_1^* = \eta_1$ és $\delta_1^* \rightarrow \delta_{2,0}$, ha $\eta_1 < \Delta_1^* < \eta$, pontosan a 4.3. Ábra feltételei szerint.

Végül ha $\Delta_1^* = 0$, akkor az $\eta_1 = 0$ mellett $\delta_1^* \rightarrow \delta_0$ a helyes átmenet, míg $\eta_1 > 0$ esetén a 3.2. Táblázat és a 3.17. Lemma szerint $0 \leq \eta_2 \leq \eta_1$ feltételnek is fenn kell állnia, ezért $\delta_1^* = \beta_1$. Az ábrában ilyenkor valóban a

$\delta_1^* \rightarrow \delta^{(1)} \rightarrow \beta_1$ út adódik, helyesen.

Ezzel az összes lehetséges konfiguráció-típust megvizsgáltuk. Nyilvánvaló ugyanez az érvelés akkor is, ha az ütemezés közben bármikor jutunk a δ_0 szituációba és hozzuk az s_1 döntést, vagy bárhol jutunk a $\delta^{(1)}$ csúcsba.

Q.e.d.

Megjegyezzük e bizonyítás után, hogy a 4.3. Ábra grájában az $R_{j,0}$ csúcsok nemcsak a /4.3./ különleges esetnek megfelelő aperiodikus ütemterveket képviselik, hanem a másik eseteket is, amikor a /3.18/-nak nincs megoldása, nevezetesen amikor

$$/4.4/ \quad \eta_j > 0, \quad \tau_{3-j} = 0 \quad /j=1,2/$$

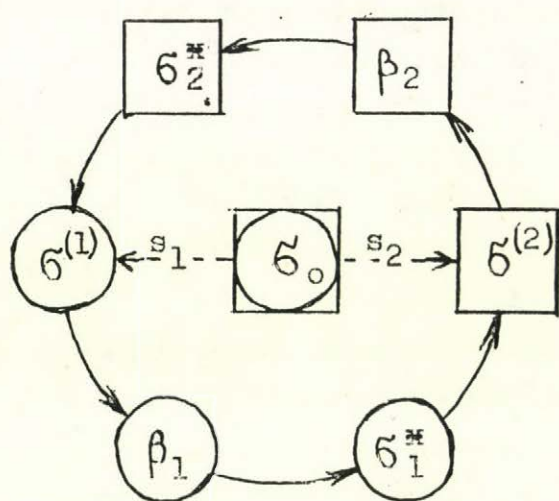
fennáll.

A 4.3. Ábra ciklikus gráján az ütemtervek határozott szakaszait a kritikus szituációtól kritikus szituációig vezető utak képviselik. Egy szituáció visszatérését egy út záródása /hurok/ jelenti. Vegyük észre, hogy a gráfban nincs olyan zárt hurok, amely $\delta^{(1)}$ szituációt ne tartalmazna. Egy periodikus /pl. következetes/ ütemterv periódusát is zárt ut képviseli, azonban két feltétellel:

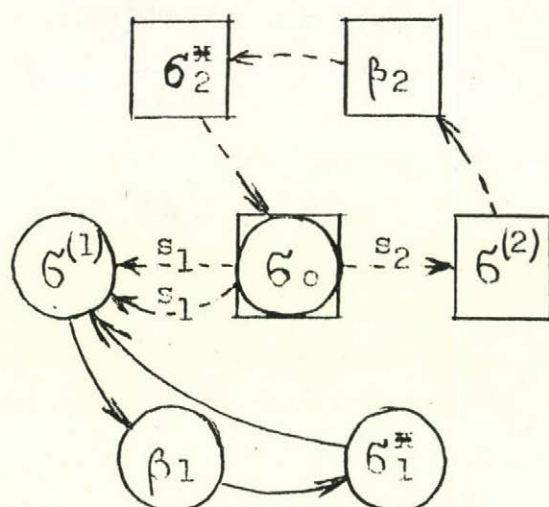
/1/ a zárt ut nem képvisel periodust, ha kétszer egymás után nem járható be a 2. Megállapodás miatt.

/2/ két hurokból álló zárt ut képvisel egy periodust az /1/ alatti zárt utaknál és akkor, ha a két hurokban ugyanaz a kritikus szituáció eltérő értéket képvisel /l. 4.1/ [e] Ábrákat/. Ilyenkor a zárt ut mindig érint ellentétesen keretezett csúcsokat.

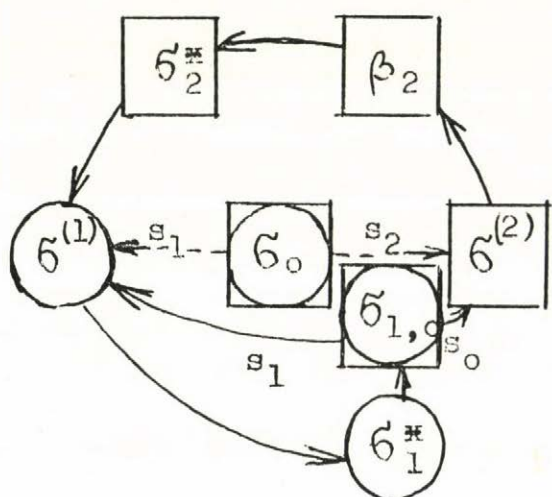
Adott konkrét $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációnál a lehetséges rákövetkezéseket a 4.3. Ábra egy részgráfja ábrázolja, amelyben minden nem kritikus szituációból egyetlen kivezető nyíl /él/ van és csak a fellépő kritikus szituációkban van két kivezető nyíl. Tipikus gráfokat mutat be a 4.4. Ábra. Az ilyen grafból kiolvashatók azok a leg-rövidebb zárt utak, amelyek a fenti /1/ és /2/ feltételeknek eleget tesznek és nem tartalmaznak hasonló tulajdonságú zárt részutakat. Ezeket lehetséges periodusoknak nevezzük.



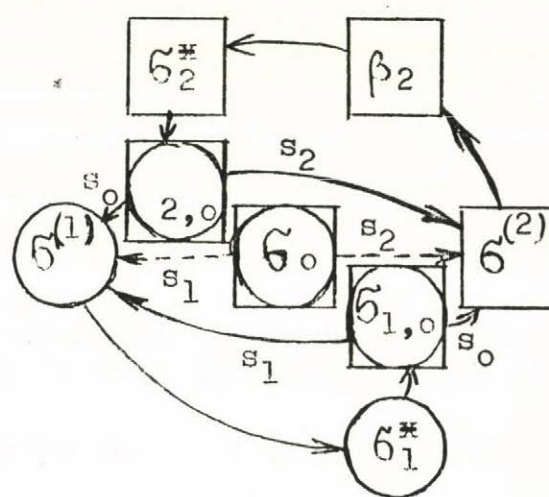
(a)



(b)



(c)



(d)

4.4. Ábra: Konfigurációk tipikus gráfjai

Ha például a ζ_0 szituációból s_a döntés után nem jutunk többé kritikus szituációba, ahol szabad döntési választás lenne, akkor $R^{(Ta)}$ egyetlen R_{ao} elem /4.4/ (a), (b) Ábra/. A 4.4/ (b) Ábra olyan esetet mutat, amikor az s_2 döntés visszavezet ugyan a ζ_0 szituációba, azonban a 2. Megállapodás miatt / $\tau_2=0$ / s_2 döntés nem ismételhető. Ha egy lehetséges periodus mindkét keretezésű csúcsot tartalmaz, akkor két lényegében azonos KT ütemtervet képvisel. A KT ütemtervek útját a 4.3. és 4.4. Ábrákon az jellemzi, hogy miután egy lehetséges periodust egyszer bejárt, ebből nem léphet ki, ezt ismétli végtelen sokszor. Tudjuk, hogy legfeljebb három lehetséges periodus van, hiszen legfeljebb három lényegében nem azonos ütemterv lehetséges következetes ütemezés mellett. A három lehetséges periodust jellemzi a benne szereplő $\zeta^{(i)}$ szituációk száma és típusa. A három lehetőség

$$\begin{array}{llll} \zeta^{(1)} & \text{---} & \zeta^{(1)} & \text{---} & \zeta^{(1)} & \text{---} & \dots \\ \zeta^{(2)} & \text{---} & \zeta^{(2)} & \text{---} & \zeta^{(2)} & \text{---} & \dots \\ \zeta^{(1)} & \text{---} & \zeta^{(2)} & \text{---} & \zeta^{(1)} & \text{---} & \zeta^{(2)} & \text{---} & \dots \end{array}$$

Könnyű látni, hogy a változatok száma csökken, ha a /4.2/ feltételek közül egy vagy több bekövetkezik.

Azt is könnyű belátni, hogy bármely természetes ütemtervben csupán a lehetséges periodusok szerepelhetnek váltakozva és esetleg egymásba ágyazva. Mindegyik lehetséges periodusnak meghatározott P_A -kihasználtsága van. Az ütemtervek hatékonyságai ezek különféle súlyozott átlagai, amelyek egyike sem lehet nagyobb, mint a P_A -kihasználtságok maximuma.

Minden lehetséges periodushoz van olyan KT ütemterv, amelynek ez a periodusa. Van tehát olyan is, amelynek maximális a hatékonysága.

Ez azt jelenti, hogy a KT ütemtervek dominálják a természetes ütemterveket. Ezzel bizonyítottunk egy fontos tételt.

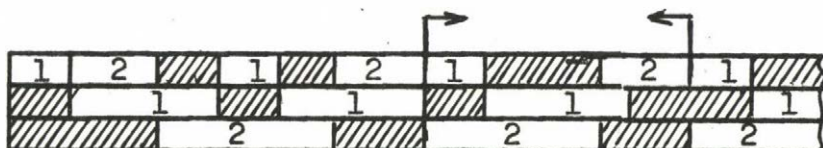
4.2. Tétel: A következőket természetes ütemtervek osztálya összefüggő-domináns.

Bizonyítás: Mivel a 3.2. Tétel szerint a természetes ütemtervek összefüggő-dominánsak, a KT ütemtervek pedig dominálják a természetes ütemterveket, az állítás nyilvánvaló.

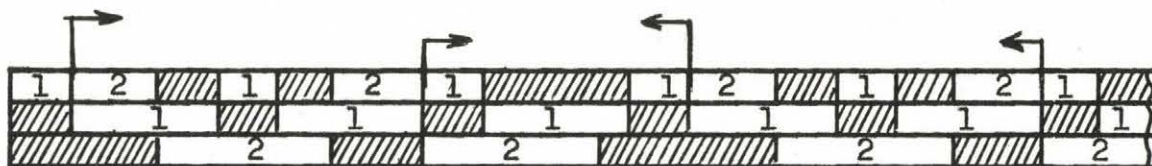
Q.e.d.

E tétel következtében az összefüggő-optimális ütemtervet legkedvezőtlenebb esetben is hat ütemterv közül kell kiválasztani, amelyek legfeljebb három hatékonyságot képviselnek. Ez gyakran kevesebbre redukálódik. Ezek közé az ütemtervek közé tartozik a 3.6. Tétel szerint a két összefüggő prioritásos ütemterv is: R_{10} és R_{20} . Könnyű belátni, hogy ezek a szoros ütemtervek az osztályon belül. Felvetődik a kérdés, hogy ezek nem dominánsak-e a nem-szoros ütemtervekkel szemben. A válasz nemleges, amint ezt a 4.5. Ábra példája mutatja a $Q=2;5;3;6/$ konfigurációra. Ezzel a 3. Fejezetben a 3.3. Tétel után maradt nyitott kérdés eldőlt: a szoros összefüggő ütemtervek nem feltétlenül dominánsak.

Nyitva marad azonban a kérdés, hogy milyen feltételek között lesz az R_{10} , R_{20} szoros ütemterv-pár domináns. Ez csak az ütemtervek részletesebb kvantitatív elemzése után válaszolható meg.



$$p_{10}=p_{20}=\tau_1+\frac{2}{3}\eta_2=\tau_2=9, \quad \gamma_{10}=\gamma_{20}=5/9=0.56$$



$$p_1=p_2=3\tau_1=2\tau_2+\eta_1+\frac{1}{3}\eta_2=21, \quad \gamma_1=\gamma_2=12/21=0.571$$

4.5. Ábra: Szoros ütemterv nem okvetlen domináns

/Példa: $Q = /2;5;3;6/$, $\gamma_{10} < \gamma_1$ /

A 4.1. Ábrán látható ütemtervek alapján, amelyeknél a periodushosszakot is felírtuk, előállíthatjuk a KT ütemtervek periodushosszának és hatékonyságának kifejezését a /3.18/ egyenlőtlenségek megoldásával. A megoldások a 4.3. Ábra és a 4.3. Lemma szerint teljesen meghatározzák a fellépő kritikus szituációkat és a hozott első kritikus döntésekkel együtt az ütemterveket.

Vezessük be a jellegzetes döntés elnevezést és az $s^{(a)}$, $a=1,2$, jelölést arra a természetes döntésre, amely a $\sigma^{(a)}$ szituációt generálja. Ez lehet kritikus, vagy nem kritikus döntés. Jellegzetessége az, hogy egy A_a -task ütemezését generálja és az $f(A_a)$ pillanatban egy A_{3-a} -task ütemezésre kész. Ez a jellegzetessége a $\sigma^{(a)}$ szituációnak; ott egy A_a -task végződik és egy A_{3-a} -task ütemezésre kész. Ez nem jelenti azt, hogy az A_{3-a} -task feltétlenül ütemeződik is. Egy $s^{(a)}$ jellegzetes döntés vagy kritikus szituációban, vagy olyan $\sigma[t]$ szituációban következik be, amelyben $\beta^{(a)}(t)=0$, $\beta^{(3-a)}(t)=\eta_a$. Hogy $s^{(a)}$ ténylegesen milyen döntés, az függ a szituációtól. $s^{(a)}=s_a$ akkor, ha a kritikus szituáció σ_0 , $\sigma_{i,1}$, $i=1,2$, $\sigma_{a,0}$, vagy $\sigma[t]$ nem kritikus; és $s^{(a)}=s_0$, ha a kritikus szituáció $\sigma_{3-a,0}$.

Ha $\sigma[t]$ nem kritikus, akkor az $f(A_a)$ pontbeli $\sigma^{(a)}$ szituáció lehet β_a -szituáció, vagy $\sigma_{3-a,0}$, vagy σ_0 kritikus szituáció attól függően, hogy $\eta_{3-a} \leq \eta_a$, $0 < \eta_a < \eta_{3-a}$, illetve $\eta_a = 0$. A 4.3. Ábra alapján könnyű belátni, hogy a /4.3/ különleges eset kivételével bármely KT ütemtervet egyértelműen jellemez első három jellegzetes döntése. Ugyanis az első három jellegzetes döntés által generált három $\sigma^{(a)}$ szituáció között $\sigma^{(1)}$ és $\sigma^{(2)}$ közül pontosan egyik ismétlődik, amely meghatározza az ütemterv periodusát.

Használjuk az $R_{a_1 a_2 a_3}$ jelölést arra az ütemterv-típusra, amelynek első három jellegzetes döntése $s^{(a_1)}-s^{(a_2)}-s^{(a_3)}$. A lehetséges típusok $R_{a,a,a}$, $R_{a,3-a,a}$, $R_{a,3-a,3-a}$, $a=1,2$. Ezek periodusának típusa megfelelően $\sigma^{(a)}-\sigma^{(a)}$, $\sigma^{(a)}-\sigma^{(3-a)}-\sigma^{(a)}$, illetve $\sigma^{(3-a)}-\sigma^{(3-a)}$.

Most bizonyítunk egy fontos tételt ezzel kapcsolatban.

4.3. Tétel: Bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció következetes természetes ütemterveinek jellemzőit teljesen meghatározza a

$$/4.5/ \quad 0 \leq B_i \tau_i - A_i \tau_{3-i} \leq \eta, \quad i=1,2$$

egyenlőtlenségek $\omega_i \geq /1,0/$ megoldásainak léte és létezésük esetén a legkisebb $\omega_i^* = /B_i^*, A_i^*/$, $i=1,2$, megoldások értéke és Δ_i^* , $i=1,2$, hibája a következők szerint.

/i/ Ha a /4.5/ egyenlőtlenségek egyikének sincs megoldása, akkor $R_{10} \approx R_{20}$ az egyedüli KT ütemtervek, amelyek nem periodikusak. Ez pontosan a /4.3/ különleges esetben következik be. A hatékonyság $\gamma=0$. Minden más esetben a KT ütemtervek periodikusak.

/ii/ Ha a /4.5/ egyenlőtlenségnek $i=j$ / $j=1,2$ / mellett nincs, de $i=3-j$ mellett van megoldása, akkor $R_{j0} = R_{jjj}$ és $R_{3-j,0} = R_{3-j,j,j}$, két KT ütemterv létezik, amelyek periodikusak és lényegében azonosak. Ez pontosan a /4.4/ esetben következik be, amikor tehát $\gamma_j > 0$, $\tau_{3-j} = 0$. A periodushossz, P_A -foglaltság és a hatékonyság megfelelően:

$$p = \tau_j, \quad a = \eta_j, \quad \gamma = \frac{a}{p} = \gamma^{(j)}.$$

Ezeket más formában a /iv/ bekezdésben még megadjuk.

/iii/ Ha a /4.5/ egyenlőtlenségnek mindkettőnek van $\omega_i \geq /1,0/$ megoldása, akkor minden KT ütemterv periodushossza és hatékonysága kifejezhető a legkisebb ω_i^* megoldások és azok hibája segítségével.

A periodushossz

$$/4.6/ \quad p_a = \mu_1^{(a)} \tau_1 + U_1^{(a)} = \mu_2^{(a)} \tau_2 + U_2^{(a)},$$

a P_A -foglaltság

$$/4.7/ \quad a_a = \mu_1^{(a)} \eta_1 + \mu_2^{(a)} \eta_2$$

és a hatékonyság

$$/4.8/ \quad \gamma_a = \frac{a_a}{p_a} = /1 - \frac{U_1^{(a)}}{p_a} / \gamma^{(1)} + /1 - \frac{U_2^{(a)}}{p_a} / \gamma^{(2)}, \quad / \frac{0}{0} = 0! /$$

alakú, ahol

	Tipus	Feltételek				4.1. Ábrarész
		δ_a^{π}	$s(\delta_a^{\pi})$	δ_{3-a}^{π}	$s(\delta_{3-a}^{\pi})$	
/4.9/a/	$R_{a,a,a}$	β_a / δ_a'	$s^{(a)}$	-	-	(a), (b)
/4.9/b/	$R_{a,3-a,3-a}$	β_{3-a} / δ_a'	$s^{(3-a)}$	$\beta_{3-a} / \delta_{3-a}'$	$s^{(3-a)}$	(d), (g)
/4.9/c/	$R_{a,3-a,a}$	β_{3-a} / δ_a'	$s^{(3-a)}$	β_a / δ_{3-a}'	$s^{(a)}$	(c), (e), (f)

	$\Pi^{(a)}$ jellemzők			
	$\mu_a^{(a)}$	$\mu_{3-a}^{(a)}$	$U_a^{(a)}$	$U_{3-a}^{(a)}$
/4.9/a/	B_a^{π}	A_a^{π}	0	Δ_a^{π}
/4.9/b/	A_{3-a}^{π}	B_{3-a}^{π}	Δ_{3-a}^{π}	0
/4.9/c/	$B_a^{\pi} + A_{3-a}^{\pi}$	$A_a^{\pi} + B_{3-a}^{\pi}$	$\eta - \Delta_a^{\pi}$	$\eta - \Delta_{3-a}^{\pi}$

/iv/ $\mathfrak{J}_j > 0$, $\tau_{3-j} = 0$ esetén az /ii/ alatti p , a , δ a következőképpen is felírhatók:

$$/4.6'/ \quad p = \mu_1 \tau_1 + U_1 + \delta / \tau_1 + \tau_2 / = \mu_2 \tau_2 + U_2 + \delta / \tau_1 + \tau_2 /$$

$$/4.7'/ \quad a = \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2 + \delta / \eta_1 + \eta_2 /$$

$$/4.8'/ \quad \gamma = \frac{a}{p} = 1 - \frac{U_1}{p} / \gamma^{(1)} + 1 + \frac{U_2}{p} / \gamma^{(2)}, \quad / \frac{0}{0} = 0! / ,$$

ahol

j	Tipus	μ_1	μ_2	U_1	U_2	Feltétel
1	$R_{111} \approx R_{211}$	$0 = A_2^{\pi}/$	$1 = B_2^{\pi}/$	$0 = \Delta_2^{\pi}/$	0	$\mathfrak{J}_1 > 0, \tau_2 = 0$
2	$R_{122} \approx R_{222}$	$1 = B_1^{\pi}/$	$0 = A_1^{\pi}/$	0	$0 = \Delta_1^{\pi}/$	$\tau_1 = 0, \mathfrak{J}_2 > 0$

és

$$/4.10/ \quad \delta = 1 - \operatorname{sgn} / \tau_1 \tau_2 / .$$

Megjegyzés:

Itt $s(\beta_i)$ jelöli a jellegezetes döntést a β_i kritikus szituációban, vagy a β -szituáció előtt. A /4.9/a-c/ esetek közül nem léphet fel az, amelyiket a 3. Fejezetbeli 2. Megállapodás, vagy a következetesség kizár. Így $\beta_a^* = \beta_o$, vagy $\beta_{3-a}^* = \beta_o$ esetén a következetesség miatt csak $s(\beta_o) = s_a$ lehetséges. $\tau_a = 0$ esetén az $s(\beta_a^*) = s_a$ és $\tau_{3-a} = 0$ esetén az $s(\beta_{3-a}^*) = s_{3-a}$ döntések nem lehetségesek a 2. Megállapodás miatt. A tényleges ütemterv típusok áttekintése a 4.1. Táblázatban látható. Az alábbiakban ezt is bizonyítjuk.

4.1. Táblázat: A lehetséges KT ütemtervek.

$s[o] \backslash s[o] = s_2$ $= s_1$	β_1	$\Delta_2^* = 0$ $< \eta_2$	$0 < \Delta_2^* < \eta_2$	$\Delta_2^* = \eta_2$ $\Delta_2^* = \tau_1 = 0$	$\eta_2 < \Delta_2^* < \eta$	$\Delta_2^* = \eta > \eta_2$
β_2	β_1	$\beta^{(2)} / \beta_2$	$\beta_{2,o}$	β_o	$\beta_{1,o}$	$\beta^{(1)} / \beta_1$
$0 = \Delta_1^* < \eta_1$	$\beta^{(1)} / \beta_1$	R_{222} R_{111}	R_{222} R_{211} R_{111}	R_{222} R_{111}	R_{222} R_{211} R_{111}	R_{211} R_{111}
$0 < \Delta_1^* < \eta_1$	$\beta_{1,o}$	R_{222} R_{111} R_{122}	R_{222} R_{212} R_{111} R_{211} R_{121} R_{122}	R_{222} R_{111} R_{121}	R_{222} R_{212} R_{111} R_{211} R_{121} R_{122}	R_{212} R_{211} R_{121}
$\Delta_1^* = \eta_1$ $\Delta_1^* = \tau_2 = 0$	β_o	R_{222} R_{111}	R_{222} R_{212} R_{111}	R_{222} R_{212} R_{111} R_{121}	R_{222} R_{212} R_{111}	R_{212} R_{111}
$\eta_1 < \Delta_1^* < \eta$	$\beta_{2,o}$	R_{222} R_{111} R_{122}	R_{222} R_{212} R_{111} R_{211} R_{121} R_{122}	R_{222} R_{111} R_{121}	R_{222} R_{212} R_{111} R_{211} R_{121} R_{122}	R_{212} R_{211} R_{121}
$\Delta_1^* = \eta > \eta_1$	$\beta^{(2)} / \beta_2$	R_{222} R_{122}	R_{222} R_{212} R_{121} R_{122}	R_{222} R_{121}	R_{222} R_{212} R_{121} R_{122}	R_{212} R_{121}

Bizonyítás: Azt, hogy /i/ és /ii/ igazak, már a 4.3. Lemma bizonyításában megmutattuk. A /4.4/ esetben nyilvánvaló, hogy $i=3$ -a mellett a /4.5/-nek megoldása az $\omega_i^* = /1, 0/$, amelyre $\Delta_i^* = 0$. Csupán az /iii/ és /iv/ állításokat kell bizonyítanunk.

Nem elfajult konfigurációnál a 4.1. Ábrák alapján minden elképzelhető esetben egyszerűen ellenőrizhető /4.6/ az ábrák alatt feltüntetett formulák alapján, amelyek viszont a ciklusvégződésekre érvényes /3.6/ formulákból következnek. A periodikus ütemtervekre /4.7/ a /4.6/-ből következik a /3.2/ szerint. A /4.8/ legegyszerűbben a $\delta^{(1)}_i = \eta_i / \tau_i$ és /4.6/ helyettesítésével ellenőrizhető, amikor a_a / p_a adódik. A 4.1. Táblázat a 4.1. Ábrák alapján ellenőrizhető. Végülis csak elfajult esetekben marad /4.6/ és a táblázat ellenőrzése. A δ_a értékét csak bizonyos elfajulásoknál lehet problematikus számítani, amikor egyszerű helyettesítés határozatlanságot eredményez. Ez a nulla eset, amelyben $o/o=0$ megállapodást kell alkalmazni /4.8/ érvényességéhez.

$\tau_1 = \tau_2 = 0$ nulla konfigurációnál $\omega_i^* = /1, 0/$, $\Delta_i^* = 0$, $\delta_i^* = \beta_{3-i}$ és a /4.6/ triviálisan a $p_a = 0$ periodushosszat szolgáltatja. A $o/o=0$ megállapodással $\delta_a = 0$ adódik a 3. Fejezet 3. Megállapodásával összhangban. R_{121} és R_{212} a lehetséges ütemtervek. $\eta_1 > 0$, $\tau_1 = \tau_2 = 0$ degenerált esetben $\omega_1^* = /1, 0/$, $\Delta_1^* = \eta_1$, $\delta_1^* = \delta_0$, $\omega_2^* = /1, 0/$, $\Delta_2^* = 0 = \eta_2$, $\delta_2^* = \delta_0$, azonban a 2. Megállapodást figyelembe kell venni. A /4.9/ táblázat lehetséges értékei most:

	δ_a^*	s/δ_a^*	δ_{3-a}^*	s/δ_{3-a}^*	$\mu_a^{(a)}$	$\mu_{3-a}^{(a)}$	$U_a^{(a)}$	$U_{3-a}^{(a)}$	Megjegyzés
a=1	δ_0	s_1	-	-	1	0	0	η_1	R_{111}
	δ_0	s_2	-	-	-	-	-	-	Következetesség!
a=2	δ_0	s_2	-	-	-	-	-	-	2. Megállapodás
	δ_0	s_1	δ_0	s_1	-	-	-	-	Következetesség!
	δ_0	s_1	δ_0	s_2	1	1	η_1	0	R_{212}

A táblázatunk $s_a=s_1$ és s_2 mellett mutatja a /4.9/ adatait. A hat közül négy változat a 2. Megállapodás és a következetesség miatt nem megvalósítható. A két érvényes R_{111} és R_{212} esetben rendre $p_a = \eta_1$, és $\mu_1=1$ eredményeként $a_a = \eta_1$ és /4.8/-ből $\gamma_a=1$ helyes eredményeket kapjuk. A $\gamma_1 > 0, \tau_2=0$ az /ii/ eset, amelyre formuláink nem érvényesek. Ugyancsak nem értelmezhetők a /4.3/ különleges esetre sem.

$\eta=0, \gamma_1 \gamma_2 > 0$, de γ_1, γ_2 racionálisan összefüggők, esetben a /4.5/ megoldásai $\omega_i^* = /k_{3-i}, k_i/$ és $\omega_{3-i}^* = /k_i, k_{3-i}/$, ha $\gamma_1/\gamma_2 = k_1/k_2, k_1, k_2 > 0$, relativ prim egészek. Ekkor $\Delta_1^* = \Delta_2^* = 0$ és $p_1=p_2=k_2 \gamma_1=k_1 \gamma_2$. Mivel $\delta_1^* = \delta_2^* = \delta_0$, ezért csak a /4.9/a/ esetek lehetségesek a következetesség mellett, így a kapott p_a -k valóban helyesek. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ triviális.

$\eta > 0, \tau_1 \tau_2 > 0$ esetek közül még több elfajult lehetséges.

$\eta_1 \eta_2 > 0, \gamma = 0$ esetben $\omega_i^* = /1, 0/$, $\Delta_i^* = \eta_i$, $\delta_i^* = \delta_0$, $i=1,2$, és csak két R_{111} és R_{222} következetes ütemterv van a /4.9/a/ eseteknek megfelelően $p_a = \eta_a$, $a_a = \eta_a$, $\gamma_a = 1$, $a=1,2$, helyes jellemzőkkel.

$\gamma_1 \tau_2 > 0$, $\gamma_1 = 0$ esetben $\omega_1^* = /1, 0/$, $\omega_2^* = /1, [\frac{\gamma_2}{\gamma_1}]/$
 /v.ö.a 3.15. Lemma utáni 3. Megjegyzéssel/, $\Delta_1^* = \gamma_1$,
 $\gamma_2 \leq \Delta_2^* = \gamma_2 + \{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\} \gamma_1 < \gamma$, $\delta_1^* = \delta_0$, $\delta_2^* = \delta_{1,0}$.

A /4.9/ táblázat érvényes adatai

	δ_a^*	$s/\delta_a^*/$	δ_{3-a}^*	$s/\delta_{3-a}^*/$	$\mu_a^{(a)}$	$\mu_{3-a}^{(a)}$	$U_a^{(a)}$	$U_{3-a}^{(a)}$
a=1	δ_0	s_1	-	-	1	0	0	γ_1
a=2	$\delta_{1,0}$	s_2	-	-	1	$[\frac{\gamma_2}{\gamma_1}]$	0	$\gamma_2 + \{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\} \gamma_1$
	$\delta_{1,0}$	s_1	δ_0	s_2	1	$1 + [\frac{\gamma_2}{\gamma_1}]$	$/1 - \{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\} / \gamma_1$	γ_2

Az ebből rendre nyert $p_1 = \gamma_1$, $p_2 = \tau_2$, illetve
 $p_2 = \tau_2 + /1 - \{\gamma_2 / \gamma_1\} / \gamma_1$ értékek a 3.3. Ábrán ellenőriz-
 hetők. Ugyanigy ellenőrizhetők a /4.8/ alapján nyert
 $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = (\gamma_2 + [\gamma_2 / \gamma_1] \gamma_1) \tau_2$, illetve $\gamma_2 = 1$
 hatékonyságok is.

A /iv/ állítás nyilvánvaló, hiszen a /4.9/ táblázat-
 beli értékeket és $\delta = 1$ értékeket helyettesítve, a /4.6'/-
 /4.8'/ átmennek a /iii/ alatti egyenlőségekbe. Ezzel minden
 lehetséges konfiguráció-típusra igazoltuk tételünket. Q.e.d.

E tétel jelentőségét az /iii/ és /iv/ alatti állí-
 tások, formulák adják meg, amelyeknek interpretációja a
 következő. Ha eltekintünk a /4.6/-4.8/ formuláknak a /4.9/
 táblázathoz való kapcsolatától, akkor a periodushosszra és
 a hatékonyságra

$$\begin{aligned} /4.6"/ \quad p &= \mu_1 \tau_1 + U_1 = \mu_2 \tau_2 + U_2 \\ /4.8"/ \quad \gamma &= /1 - \frac{U_1}{p} / \gamma^{(1)} + /1 - \frac{U_2}{p} / \gamma^{(2)} \end{aligned}$$

formulák írhatók fel, ahol μ_i a $Q^{(i)}$ job-folyam egy periodusban kiszolgált igényciklusainak száma. Így $\mu_i \tau_i$ azt az időt adja, mialatt $Q^{(i)}$ kiszolgálás alatt áll. U_i időtartamban tehát $Q^{(i)}$ nem áll kiszolgálás alatt, ennyi késleltetést szenved.

Tudjuk, hogy ha a $Q^{(i)}$ job-folyam zavartalanul ütemeződik, akkor az $\gamma^{(i)} = \eta_i / \tau_i$ terhelést jelent a P_A processzor számára. Ha mindkét job-folyam egymás zavarása /késleltetése/ nélkül ütemezhető, akkor együtt

$$\gamma_{\max} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}$$

terhelést jelentenek. Ez egyébként bármely ütemterv hatékonyságának felső határa. Ha ez 1-nél nagyobb, az együttes zavartalan ütemezés nem képzelhető el, amint ezt már a /3.5/ formula kifejezte.

Ha a $Q^{(i)}$ job-folyam periodusonként U_i késleltetést szenved, akkor az általa támasztott terhelés P_A processzoron

$$\frac{p - U_i}{p} \gamma^{(i)}$$

lesz, amint ezt /4.8/ kifejezi.

Amikor $Q^{(i)}$ nem áll kiszolgálás alatt, biztosan a P_A processzorra vár. A P_A processzor ilyenkor vagy a $Q^{(3-i)}$ job-folyamot szolgálja ki, vagy tétlenül várja annak kiszolgálására készségét. Ha tétlen szakasz előfordul, akkor a $Q^{(i)}$ job-folyamnak nemcsak ezt, hanem még egy A_{3-i} -task kiszolgálását is meg kell várnia, vagyis $U_i > \eta_{3-i}$. Ebből következik, hogy egy természetes ütemterv akkor és csak akkor nem szoros, ha az

$$U_1 > \eta_2 \quad \text{és} \quad U_2 > \eta_1$$

közül legalább egyik teljesül. A P_A processzoron a "lazaságot" a

$$\phi = \max / 0, U_1 - \eta_2 / + \max / 0, U_2 - \eta_1 /$$

formula adja meg. A P_A processzor ilyen "laza" szakaszait az jellemzi, hogy a P_{B1} és P_{B2} processzorok közül ilyenkor csak az egyik aktív, ellentétben a szoros szakaszokkal, amikor P_A csak úgy lehet tétlen, hogy mindkét job-folyam P_B -kiszolgálás alatt áll.

A /iv/ esetben a /4.6'/ és /4.8'/ értelmezése annyiban eltérő, hogy a paraméterek a 3. Fejezet 2. Megállapodása nélküli ciklusszámot és késleltetést jelentenek, amelyeket a megfelelő δ érték korrigál a 2. Megállapodásnak megfelelően helyes értékekre.

A 3.5. pontban definiált R_{a0} , $a=1,2$, összefüggő prioritásos ütemtervekről láttuk, hogy azok éppen a szoros és következetes természetes ütemtervek /3.6. Tétel/.

A 4.3. Tétel interpretációja mutatja, hogy az R_{a0} ütemterveknél $U_i^{(a)} \leq \eta_{3-i}$, $i=1,2$, mindig fennáll. Vezessük be az

$$\varepsilon_i^{(a)} = U_i^{(a)} / \eta_{3-i}, \quad i=1,2, \quad a=1,2,$$

mennyiségeket. Ezek a $Q^{(i)}$ job-folyamok relatív késleltetését adják meg az $R_{a,0}$ ütemtervben. Vezessük be az

$$\varepsilon^{(a)} = / \varepsilon_1^{(a)}, \varepsilon_2^{(a)} / , \quad a=1,2,$$

vektort /késleltetés-vektor/ és

$$\mu^{(a)} = / \mu_1^{(a)}, \mu_2^{(a)} / , \quad a=1,2,$$

vektort /ciklusszám-vektor/, mint az $R_{a,0}$ ütemterv jellemzőit periodikus esetben.

Ezeket együtt jelölje a

$$\Pi^{(a)} = / \mu_1^{(a)}, \mu_2^{(a)}; \varepsilon_1^{(a)}, \varepsilon_2^{(a)} / , \quad a=1,2,$$

jellemző-vektor.

A teljesség kedvéért legyen még

$$U^{(a)} = / U_1^{(a)}, U_2^{(a)} /$$

és $\Pi^{(a)}$ jelenthesse a

$$\Pi^{(a)} = / \mu_1^{(a)}; \mu_2^{(a)}; U_1^{(a)}; U_2^{(a)} /$$

vektort is. Ez utóbbi természetesen adott $a=1,2$ mellett nem egyértelmű, hanem a /4.9/ táblázat szerint az $s[o]=s_a$ döntésen kívül még függhet két további kritikus döntéstől is.

Az $R_{a,0}$ ütemterveknél a kritikus döntések az első $s[o]$ döntés kivételével egyértelműen meghatározottak a következőképpen. $s[o]$ -tól függetlenül $s(\delta_{i,0})=s_i$, $i=1,2$, és $s[o]=s_a$ esetén $s(\delta_0)=s_a$.

A 4.3. Lemma szerint az s_a döntéssel kezdődő határozott szakasz jellegzetes szituációja a 4.3. Ábráról olvasható le és Δ_a^* által meghatározott. Figyelembe véve a fentieket, az s_a döntést az s_a döntés követi, ha $0 \leq \Delta_a^* \leq \eta_a / \beta_a$, $\delta_{a,0}$ és δ_0 szituációk/ és az s_{3-a} döntés követi, ha $\eta_a < \Delta_a^* \leq \eta / \beta_{3-a,0}$ és β_{3-a} szituációk/. Ennek megfelelően a $\delta^{(a)}$ szituációt $\delta^{(a)}$, illetve $\delta^{(3-a)}$ szituáció követi. Az első esetben $R_{a,0}$ periodusa $\delta^{(a)} - \delta^{(a)}$ típusú és azt az ω_a^* megoldás teljesen meghatározza. A második esetben a periodus a δ_{3-a}^* jellegzetes szituációtól /is/ függ.

Ha $\sigma_{3-a}^* \neq \sigma_0$, akkor s/σ_{3-a}^* független az $s[0]=s_a$ döntéstől, ezért $R_{a,0}$ és $R_{3-a,0}$ ütemtervekben azonos és így $R_{a,0} \approx R_{3-a,0}$, azonos periodussal, amely σ_{3-a}^* típusától függ. $0 \leq \Delta_{3-a}^* < \eta_{3-a}$ esetén β_{3-a} és $\sigma_{3-a,0}$ szituációk/ a periodus típusa $\sigma_{(3-a)} - \sigma_{(3-a)}$, amelyet az $\bar{\omega}_{3-a}^*$ megoldás határoz meg. $\eta_{3-a} < \Delta_{3-a}^* \leq \eta$ esetén $\sigma_{a,0}$ és β_a szituációk/ pedig $\sigma_{(a)} - \sigma_{(3-a)} - \sigma_{(a)}$ típusú lesz a periodus, amelyet az $\omega_a^* + \bar{\omega}_{3-a}^*$ összeg határoz meg. $\sigma_{3-a}^* = \sigma_0$ esetén az $R_{a,0}$ periodusát az $s(\sigma_0)=s_a$ következtében ismét a $\sigma_{(a)} - \sigma_{(3-a)} - \sigma_{(a)}$ szituációrákövetkezés jellemzi és az $\omega_a^* + \bar{\omega}_{3-a}^*$ összeg határozza meg. Ezzel lényegében bizonyítottuk a következő alaptételt az $R_{a,0}$ ütemtervekre vonatkozóan.

4.4. Tétel: Az $R_{a,0}$, $a=1,2$, összefüggő-prioritásos ütemtervek, a /4.3/ különleges eset kivételével, mindig periodikusak, és a /4.4/ esetek kivételével, jellemzőik az alábbiak:

A periodushossz

$$/4.11/ \quad p_a = \mu_1^{(a)} \tau_1 + \varepsilon_1^{(a)} \eta_2 = \mu_2^{(a)} \tau_2 + \varepsilon_2^{(a)} \eta_1,$$

a P_A -foglaltság

$$/4.12/ \quad a_a = \mu_1^{(a)} \eta_1 + \mu_2^{(a)} \eta_2$$

és a hatékonyság

$$/4.13/ \quad \gamma_a = /1 - \frac{\varepsilon_1^{(a)} \eta_2}{p_a} / \gamma^{(1)} + /1 - \frac{\varepsilon_2^{(a)} \eta_1}{p_a} / \gamma^{(2)},$$

ahol a $\mu^{(a)}$ jellemző-vektor komponensei

$$\mu^{(1)} = \begin{cases} \omega_1^*, & \text{ha } 0 \leq \Delta_1^* \leq \eta_1 \\ \bar{\omega}_2^*, & \text{ha } \eta_1 < \Delta_1^* \leq \eta, 0 \leq \Delta_2^* < \eta_2 \\ \omega_1^* + \bar{\omega}_2^*, & \text{ha } \eta_1 < \Delta_1^* \leq \eta, \eta_2 \leq \Delta_2^* \leq \eta \end{cases}$$

/4.14/

$$\mu^{(2)} = \begin{cases} \omega_1^*, & \text{ha } 0 \leq \Delta_1^* < \eta_1, \eta_2 < \Delta_2^* \leq \eta \\ \bar{\omega}_2^*, & \text{ha } 0 \leq \Delta_2^* \leq \eta_2 \\ \omega_1^* + \bar{\omega}_2^*, & \text{ha } \eta_1 \leq \Delta_1^* \leq \eta, \eta_2 < \Delta_2^* \leq \eta \end{cases}$$

$$/4.15/ \varepsilon^{(a)} = \begin{cases} / 0, \frac{\Delta_1^*}{\eta_1} / , & \text{ha } \mu^{(a)} = \omega_1^* \\ / \frac{\Delta_2^*}{\eta_2}, 0 / , & \text{ha } \mu^{(a)} = \bar{\omega}_2^* \\ / \frac{\eta - \Delta_1^*}{\eta_2}, \frac{\eta - \Delta_2^*}{\eta_1} / , & \text{ha } \mu^{(a)} = \omega_1^* + \bar{\omega}_2^* , \end{cases}$$

ahol megállapodás szerint legyen $0/0=0$.

A /4.4/ esetekben /4.11/ mindkét jobboldalához $\delta \tau_j$ és /4.12/ jobboldalához $\delta \eta_j$ hozzáadandó és

$$\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \begin{cases} \bar{\omega}_2^*, & \text{ha } j=1, \\ \omega_1^*, & \text{ha } j=2. \end{cases}$$

Bizonyítás: A /4.11/ ekvivalens, /4.10/ definíció alapján, az igazolt /4.6/ formulával. A /4.12/ azonos /4.7/-tel és a /4.13/ a /4.8/ megfelelője. A $\mu^{(a)}$ komponensek formuláit az imént már beláttuk. A /4.9/ táblázatból és a /4.10/ definícióból azonban az $\varepsilon^{(a)}$ formulái is azonnal adódnak, ugyanis azokat a /4.6/-ba helyettesítve a /4.9/ táblázatbeli U_a értékeket kapjuk vissza. Az utolsó állítás nyilvánvaló a 4.3. Tétel /iv/ állítása alapján.

Q.e.d.

4.2. A konfigurációk redukciói: \mathcal{D}_i -redukciók.

A 4.1. pont eredményei mutatják, hogy az összefüggő-optimális ütemterv a következő természetes ütemtervek egyike. A következő természetes ütemtervek száma maximum hat és azok maximum három hatékonyságot képviselnek. A /4.3/ különleges eset kivételével mind periodikusak. A /4.4/ esetektől eltekintve az ütemtervek jellemzőit a /4.5/ egyenlőtlenségek legkisebb megoldásai szolgáltatják a $\Pi^{(a)}$ jellemző-vektorok, vagy a /4.6/ periodushossz és /4.8/ hatékonyság formájában /4.3. Tétel/.

Az összefüggő ütemtervek kvantitatív viszonyainak tisztításához tehát a két /4.5/ alatti egyenlőtlenség legkisebb $\omega_a^* \geq 1,0/$, $a=1,2$, megoldását kell meghatározni. Ezeket a 2. Fejezet eredményei alapján megkaphatjuk. A 2.7. Tétel szerint a megoldás a τ_a/τ_{3-a} szám legjobb baloldali közelítő megoldásai /LBKM/ Ω_0 halmazából a B/M/KIFM-Algoritmussal választható ki.

Az alábbiakban egy alternatív módszert tárgyalunk összefüggő periodikus ütemtervek jellemzőinek meghatározására. Ez a módszer a $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációk transzformációin alapszik, amelyekkel redukáljuk Q paramétereit. A redukció emlékeztet a lánc törtfejtés algoritmusára és annak egyik általánosításaként fogható fel.

Tetszőleges $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációra definiáljuk a \mathcal{D}_a , $a=1,2$, operátorokat a következőképpen:
A $\mathcal{D}_a Q$ konfiguráció legyen a Q -nak az a

$$/4.16/ \quad \tilde{Q}^{[a]} = / \tilde{\eta}_1^{[a]} ; \tilde{\eta}_1^{[a]} ; \tilde{\eta}_2^{[a]} ; \tilde{\eta}_2^{[a]} / \in \mathcal{Q}$$

eleme, amelynek paramétereit és egy $\ell^{[a]} = / \ell_1^{[a]} , \ell_2^{[a]} /$ egész párat a

$$Q = / \eta_1 ; \eta_1 ; \eta_2 ; \eta_2 / \in \mathcal{Q}$$

paramétereivel az alábbi módon határozzuk meg:

$$\tilde{\eta}_1^{[a]} = \eta_1 ; \quad \tilde{\eta}_2^{[a]} = \eta_2 ;$$

$$\eta_a = \ell_a^{[a]} \tau_{3-a} + \tilde{\eta}_a^{[a]} , \text{ ahol}$$

$$\ell_a^{[a]} \geq 0 \text{ egész és } 0 \leq \tilde{\eta}_a^{[a]} < \tau_{3-a} , \text{ ha } \tau_{3-a} > 0 ,$$

$$/4.17/ \quad \ell_a^{[a]} = 0 \text{ és } \tilde{\eta}_a^{[a]} = \eta_a , \text{ ha } \tau_{3-a} = 0 ;$$

$$\eta_{3-a} = \ell_{3-a}^{[a]} \tilde{\tau}_a^{[a]} + \tilde{\eta}_{3-a}^{[a]} , \text{ ahol}$$

$$\ell_{3-a}^{[a]} \geq 0 \text{ egész és } 0 \leq \tilde{\eta}_{3-a}^{[a]} < \tilde{\tau}_a^{[a]} , \text{ ha } \tilde{\tau}_a^{[a]} > 0 ,$$

$$\ell_{3-a}^{[a]} = 0 \text{ és } \tilde{\eta}_{3-a}^{[a]} = \eta_{3-a} , \text{ ha } \tilde{\tau}_a^{[a]} = 0 .$$

Nevezzük \mathcal{D}_a -t redukciós operátornak, vagy redukciónak, alkalmazását \mathcal{D}_a -redukciós lépésnek, az $\ell^{[a]} = / \ell_1^{[a]} , \ell_2^{[a]} /$ egész párat pedig hányadosoknak. $\ell_j^{[a]} \geq 0$, $j=1,2$.

Azt mondjuk, hogy a \mathcal{D}_a operátor a Q konfigurációra hatásos, ha

$$\ell_1^{[a]} + \ell_2^{[a]} > 0 ,$$

és hatástalan, ha

$$l_1^{[a]} + l_2^{[a]} = 0.$$

A /4.17/ definícióból következik, hogy

$$\tilde{\mathfrak{J}}_j^{[a]} \leq \mathfrak{J}_j, \quad j=1,2.$$

Hatásosság esetén legalább az egyik j -re $\tilde{\mathfrak{J}}_j^{[a]} < \mathfrak{J}_j$, vagyis a paraméter redukálódik. Ez indokolja a \mathfrak{D}_a elnevezését. Ha \mathfrak{D}_a hatástalan Q -ra, akkor

$$\tilde{Q}^{[a]} \doteq \mathfrak{D}_a Q = Q,$$

a konfigurációt változatlanul hagyja.

A szokásos módon értelmezhetők a \mathfrak{D}_a operátor hatványai, mint ismételt alkalmazás és legyen

$$\mathfrak{D}_a^0 Q \doteq Q, \quad \mathfrak{D}_a^k Q \doteq \mathfrak{D}_a / \mathfrak{D}_a^{k-1} Q / , \quad k=1,2,\dots$$

Nyilvánvaló a definíció alapján, hogy \mathfrak{D}_a operátor bármely $Q \in \mathcal{Q}$ -ra korlátlanul sokszor alkalmazható egymás után. Elvileg két lehetőség van: mindig hatásos, vagy egy $v+1$ -edik alkalmazás már hatástalan, $v \geq 0$.

Nyilvánvaló, hogy ha egyszer \mathfrak{D}_a hatástalan, akkor tovább már mindig az, hiszen $\mathfrak{D}_a Q = Q$ folytán $\mathfrak{D}_a / \mathfrak{D}_a Q = \mathfrak{D}_a Q = Q$. Ez azt jelenti, hogy bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációhoz definiálható az az első $v_a \geq 0$ egész, amely-nél $\mathfrak{D}_a^{v_a} Q$ konfigurációra \mathfrak{D}_a operátor már hatástalan. Ezt nevezzük a Q konfiguráció \mathfrak{D}_a -összetettségi fokának. Ez lehet végtelen is.

Ugyanakkor legyen

$$\tilde{Q}_{v_a}^{[a]} = \mathfrak{D}_a^{v_a} Q$$

a Q konfiguráció \mathcal{D}_a -redukáltja, feltéve, hogy v_a véges. Ha \mathcal{D}_a a Q -ra hatástalan, akkor Q \mathcal{D}_a -összetettségi foka $v_a=0$, és Q \mathcal{D}_a -redukált, önmagának a \mathcal{D}_a -redukáltja.

A /4.17/ definíció szerint Q akkor és csak akkor \mathcal{D}_a -redukált, ha

$$0 \leq \mathfrak{J}_a < \tau_{3-a}, \text{ vagy } \tau_{3-a}=0$$

$$\text{és } 0 \leq \mathfrak{J}_{3-a} < \tau_a, \text{ vagy } \tau_a=0.$$

Az utóbbi esetben $\tilde{\tau}_a^{[a]}$ helyett τ_a szerepelhet, mivel $\tilde{\tau}_a^{[a]} = \tau_a$. E két feltételsor ekvivalens a

$$/4.18/ \quad 0 \leq \mathfrak{J}_i < \tau_{3-i}, i=1,2, \text{ vagy } \tau_1 \tau_2=0$$

feltétellel, amelyeket a 4.6. Ábrán szemléltetünk.

Igazoljuk ezt egy lemma formájában.

4.4. Lemma: A \mathcal{D}_a , $a=1,2$, operátorok egyszerre hatástalanok a $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációra mégpedig akkor és csak akkor, ha a /4.18/ feltétel teljesül.

Bizonyítás: Ha $\tau_i=0$, akkor /4.17/ alatt $\mathfrak{J}_a \tau_{3-a}=0$, ezért $\ell_a^{[a]}=0$ és $\tilde{\tau}_a^{[a]} = \tau_a$. Ekkor $\mathfrak{J}_{3-a} \tilde{\tau}_a^{[a]}=0$ is nyilvánvaló és így $\ell_{3-a}^{[a]}=0$ is igaz.

Ha $\tau_1 \tau_2 > 0$, de $0 \leq \mathfrak{J}_i < \tau_{3-i}$, $i=1,2$, teljesül, akkor /4.17/ alatt a $0 \leq \mathfrak{J}_a < \tau_{3-a}$ és $\tau_{3-a}=0$ feltételek közül egyik teljesül, így

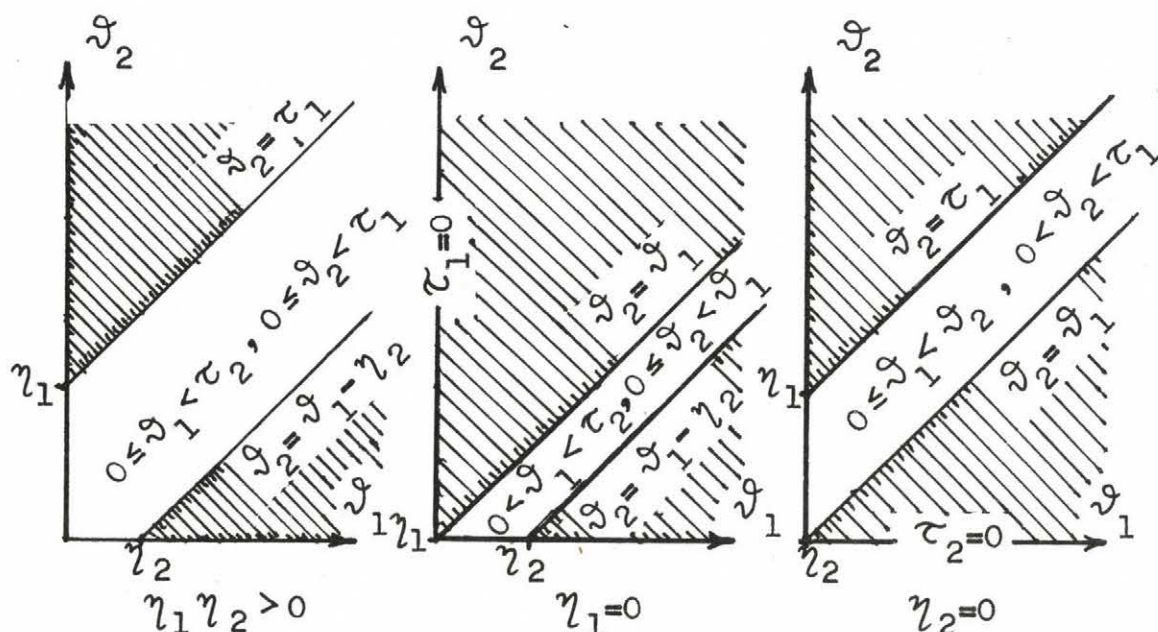
$\ell_a^{[a]}=0$, $\tilde{\tau}_a^{[a]} = \tau_a$. Ekkor a $0 \leq \mathfrak{J}_{3-a} < \tilde{\tau}_a$ és $\tilde{\tau}_a=0$ közül is teljesül egy, így

$\ell_{3-a}^{[a]}=0$ is igaz. /4.18/ esetén tehát \mathcal{D}_a hatástalan. /4.17/ szerint $\ell_a^{[a]}=0$ pontosan akkor lesz, ha $\tau_{3-a}=0$ vagy $\tau_{3-a}>0$ és $0 \leq \mathfrak{J}_a < \tau_{3-a}$ és

$\ell_{3-a}^{[a]} = 0$ pontosan akkor, ha $\tau_a = 0$, vagy

$\tau_a > 0$ és $0 \leq \vartheta_{3-a} < \tau_a$. E feltételpárok bármely kombinációja maga után vonja a /4.18/ teljesülését.

Q.e.d.



4.6. Ábra: A redukált konfigurációk terének szemléltetése.

A \mathcal{D}_1 és \mathcal{D}_2 operátorok abban különböznek egymástól, hogy náluk a $Q^{(1)}$ és $Q^{(2)}$ job-folyamok szerepe megcserélődik. A \mathcal{D}_1 operátor a ϑ_1 paramétert, a \mathcal{D}_2 operátor a ϑ_2 paramétert redukálja először.

Vezessük be egy

$$Q = / \eta_1; \vartheta_1; \eta_2; \vartheta_2 / \in Q$$

konfiguráció konjugáltjaként a

$$\bar{Q} = / \bar{\eta}_1; \bar{\vartheta}_1; \bar{\eta}_2; \bar{\vartheta}_2 / \in Q$$

konfigurációt, amelynek paraméterértékei

$$/4.19/ \quad \bar{\gamma}_1 = \gamma_2; \quad \bar{\gamma}_1 = \gamma_2; \quad \bar{\gamma}_2 = \gamma_1; \quad \bar{\gamma}_2 = \gamma_1.$$

E konjugált konfiguráció segítségével a \mathcal{D}_1 és \mathcal{D}_2 operátorok közötti viszonyt a

$$/4.20/ \quad \mathcal{D}_{3-i} Q = \overline{\mathcal{D}_i Q}, \quad i=1,2, \quad Q \in \mathcal{Q}$$

azonosság fejezi ki, amint ezt a /4.17/ definíció alapján könnyen beláthatjuk. Ez az összefüggés lehetővé teszi, hogy a \mathcal{D}_1 és \mathcal{D}_2 operátor kapcsolatát a \mathcal{D}_1 operátor Q és \bar{Q} konjugáltakra történő alkalmazásának kapcsolatán keresztül vizsgáljuk. E kapcsolat vizsgálatára később térünk vissza. Mindenesetre ez az összefüggés szükségtelenné teszi \mathcal{D}_1 és \mathcal{D}_2 külön elemzését.

A továbbiakban a \mathcal{D}_1 vizsgálatával foglalkozunk. A jelölések egyszerűsítése érdekében a rá utaló [1] felső indexeket elhagyjuk és a következő jelöléseket alkalmazzuk:

$$\mathcal{D} \doteq \mathcal{D}_1$$

$$Q_k \doteq / \gamma_1; \gamma_{1,k}; \gamma_2; \gamma_{2,k} / , \quad k=0,1,\dots$$

$$\tau_{i,k} = \gamma_i + \gamma_{i,k}, \quad k=0,1,\dots, \quad i=1,2.$$

Legyenek

$$Q_0 = Q = \mathcal{D}^0 Q; \quad Q_k = \mathcal{D}^k Q, \quad k=1,2,\dots$$

$$(Q) = \{Q_0, Q_1, Q_2, \dots\}$$

$$(\ell) = \{\ell_{1,0}, \ell_{2,0}, \ell_{1,1}, \ell_{2,1}, \dots\}$$

a \mathcal{D} -redukció generálta sorozatok. Nevezzük redukciós egyenleteknek a $Q_{k+1} = \mathcal{D}Q_k$ operációt definiáló egyenleteket:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{1,k} &= l_{1,k} \tau_{2,k} + \mathcal{J}_{1,k+1}, \text{ ahol } l_{1,k} \geq 0 \text{ egész és} \\ &0 \leq \mathcal{J}_{1,k+1} < \tau_{2,k}, \text{ ha } \tau_{2,k} > 0, \\ /4.21/ \quad \mathcal{J}_{1,k+1} &= \mathcal{J}_{1,k} \text{ és } l_{1,k} = 0, \text{ ha } \tau_{2,k} = 0 \\ \mathcal{J}_{2,k} &= l_{2,k} \tau_{1,k+1} + \mathcal{J}_{2,k+1}, \text{ ahol } l_{2,k} \geq 0 \text{ egész és} \\ &0 \leq \mathcal{J}_{2,k+1} < \tau_{1,k+1}, \text{ ha } \tau_{1,k+1} > 0, \\ \mathcal{J}_{2,k+1} &= \mathcal{J}_{2,k} \text{ és } l_{2,k} = 0, \text{ ha } \tau_{1,k+1} = 0. \end{aligned}$$

Legyen

$$\nu \doteq \nu_1, \quad 0 \leq \nu \leq \infty$$

a Q konfiguráció \mathcal{D} -összetettségi foka.

Szükségünk lesz a következő lemmára.

4.5. Lemma: Legyen $l_{i,k}$ az $l_{1,0}$ utáni első olyan hányados az (l) sorozatban, amelyre

$$l_{i,k} = 0$$

/ha ilyen létezik/;

Amikor $/i,k/ = /2,0/$, akkor

\mathcal{D} a Q_0 -tól kezdve hatástalan, ha $l_{1,0} = 0$,

\mathcal{D} a Q_1 -től kezdve hatástalan, ha $l_{1,0} > 0$;

Amikor $k > 0$, akkor

\mathcal{D} a Q_k -tól kezdve hatástalan, ha $i=1$

\mathcal{D} a Q_{k+1} -től kezdve hatástalan, ha $i=2$.

Bizonyítás: Ha $\ell_{1,0} = \ell_{2,0} = 0$, akkor \mathcal{D} a Q_0 -tól kezdve hatástalan nyilvánvalóan.

Legyen $\ell_{2,k}$, $k \geq 0$ az első 0 értékű hányados. A /4.21/ definíció szerint ekkor vagy $\tau_{1,k+1} = 0$, vagy $0 \leq \vartheta_{2,k} < \tau_{1,k+1}$ teljesül, de mindkét esetben $\vartheta_{2,k+1} = \vartheta_{2,k}$ és $\tau_{2,k+1} = \tau_{2,k}$. Ezért a következő $\vartheta_{1,k+1} = \ell_{1,k+1} \tau_{2,k+1} + \vartheta_{1,k+2}$ egyenlet ekvivalens a $\vartheta_{1,k+1} = \ell_{1,k+1} \tau_{2,k} + \vartheta_{1,k+2}$ egyenlettel. Feltetésünk szerint még $\ell_{1,k} > 0$, ami a /4.21/ szerint csak $0 < \tau_{2,k} < \vartheta_{1,k}$ mellett lehet és ezért a /4.21/-ből $0 \leq \vartheta_{1,k+1} < \tau_{2,k}$. Ekkor a fenti egyenletünk megoldása $\ell_{1,k+1} = 0$ és $\vartheta_{1,k+2} = \vartheta_{1,k+1}$. Következésképpen $\tau_{1,k+2} = \tau_{1,k+1}$ adódik, vagyis \mathcal{D} hatástalan a Q_{k+1} -re, de nem hatástalan a Q_k -ra. $k=0$ mellett ez bizonyítja a lemma első állítását. $k > 0$ mellett legyen $/i,k/ = /1,k/$ az első 0 értékű hányados indexe. A /4.21/ szerint $\ell_{1,k} = 0$ csak $\tau_{2,k} = 0$ vagy $0 \leq \vartheta_{1,k} < \tau_{2,k}$ mellett lehet és mindkét esetben $\vartheta_{1,k+1} = \vartheta_{1,k}$ és $\tau_{1,k+1} = \tau_{1,k}$. Ezért a $\vartheta_{2,k} = \ell_{2,k} \tau_{1,k+1} + \vartheta_{2,k+1}$ egyenlet ekvivalens a $\vartheta_{2,k} = \ell_{2,k} \tau_{1,k} + \vartheta_{2,k+1}$ egyenlettel. Mivel azonban $\ell_{2,k-1} > 0$ feltevéseink szerint még igaz, ezért a /4.21/-ben $0 < \tau_{1,k} < \vartheta_{2,k-1}$ és $0 \leq \vartheta_{2,k} < \tau_{1,k}$ teljesülnek, ezért egyenletünk megoldása $\ell_{2,k} = 0$ és $\vartheta_{2,k+1} = \vartheta_{2,k}$. Vagyis $\ell_{1,k} + \ell_{2,k} = 0$ és \mathcal{D} hatástalan Q_k -ra.

Q.e.d.

A következő lemma alapvető a további vizsgálatainkban, de önmagában is érdekes, mint a számok lánc törtfejtésének hosszával analog eredmény.

4.6. Lemma: A /4.3/ különleges konfiguráción kívül bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció \mathcal{D} -összetettségi foka, $v \geq 0$, véges. A $Q_v = \mathcal{D}^v Q$ konfigurációra \mathcal{D} már hatástalan. A /4.3/ különleges konfigurációnál bármely véges k esetén \mathcal{D} hatásos $Q_k = \mathcal{D}^k Q$ -ra és $v = \infty$, $Q_\infty = 0$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy valamely Q konfigurációra \mathcal{D} korlátlan sokszor alkalmazva mindig hatásos. Megmutatjuk, hogy Q csak a /4.3/ különleges konfiguráció lehet. Ha \mathcal{D} a Q_k -ra hatásos, akkor a 4.4. Lemma szerint /4.18/ nem teljesül, vagyis

$$\tau_{1,k} \tau_{2,k} > 0, \text{ és } \vartheta_{1,k} \geq \tau_{2,k} \text{ vagy } \vartheta_{2,k} \geq \tau_{1,k}.$$

A 4.5. Lemma szerint az $\ell_{1,0}$ esetleges kivételével $\ell_{i,k} > 0$, $i=1,2$, $k \geq 0$, mert különben \mathcal{D} hatástalan lenne a következő konfigurációtól kezdve, ha $\ell_{i,k} = 0$ lépne fel. Ekkor /4.21/-ből

$$\begin{aligned} \vartheta_{1,k} &\geq \tau_{2,k} + \vartheta_{1,k+1} \geq \eta_2 + \vartheta_{1,k+1} \\ \vartheta_{2,k} &\geq \tau_{1,k+1} + \vartheta_{2,k+1} \geq \eta_1 + \vartheta_{2,k+1}. \end{aligned}$$

Vagyis

$$\vartheta_{i,0} \geq \vartheta_{i,1} > \dots > \vartheta_{i,k} > \dots$$

monoton fogyó sorozat, amely alulról korlátos és a tagonkénti csökkenése legalább η_{3-i} . Ezért $\eta_{3-i} > 0$ esetén a sorozat nem lehet végtelen tagú. $\eta > 0$ mellett tehát a v összetettségi fok csak véges lehet.

Legyen most $\eta=0$. Ha $\mathcal{V}_{1,k} \mathcal{V}_{2,k}=0$, akkor Q_k redukált. Legyen tehát minden $k \geq 0$ -ra $\mathcal{V}_{1,k} \mathcal{V}_{2,k} > 0$.
A /4.21/ redukciós egyenletek alakja ekkor

$$\mathcal{V}_{1,k} = l_{1,k} \mathcal{V}_{2,k} + \mathcal{V}_{1,k+1}$$

$$\mathcal{V}_{2,k} = l_{2,k} \mathcal{V}_{1,k+1} + \mathcal{V}_{2,k+1}$$

$k=0,1, \dots$

Bevezetve a

$$\xi_{2k} = \frac{\mathcal{V}_{1,k}}{\mathcal{V}_{2,k}}, \quad b_{2k} = l_{1,k}, \quad k=0,1, \dots$$

/4.22/

$$\xi_{2k+1} = \frac{\mathcal{V}_{2,k}}{\mathcal{V}_{1,k+1}}, \quad b_{2k+1} = l_{2,k}, \quad k=0,1, \dots$$

jelöléseket, egyenleteink ekvivalensek a

$$/4.23/ \quad \xi_l = b_l + \frac{1}{\xi_{l+1}}, \quad l=0,1, \dots$$

rekurzív formulával, ahol

$$b_0 \geq 0 \quad \text{és} \quad b_l \geq 1, \quad l=1,2, \dots$$

Ebből következik, hogy $\xi_l \geq 1$, azonban $\xi_l = b$ egész azt jelentené, hogy $\mathcal{V}_{1,k} = b \mathcal{V}_{2,k}$ vagy $\mathcal{V}_{2,k} = b \mathcal{V}_{1,k+1}$. Az első esetben $l_{1,k} = b-1$, $l_{2,k}=0$, a másodikban $l_{2,k} = b-1$, $l_{1,k+1}=0$. A 4.5. Lemma szerint mindkét esetben Q_{k+1} -től kezdve \mathcal{D} már hatástalan, ami ellentmond feltevéseinknek.

Vagyis $\xi_\ell > 1$, $\ell=1,2,\dots$ és sosem egész. Ezért a /4.23/ nem egyéb, mint a $\xi_0 = \vartheta_{1,0}/\vartheta_{2,0}$ szám szabályos lánc törtfejtésének algoritmus, amely csak akkor lesz végtelen, ha ξ_0 irracionális. Ez pedig éppen a /4.3/ különleges eset. $\vartheta_{i,k} \rightarrow \vartheta_i$, ha $k \rightarrow \infty$. $\vartheta_i > 0$ esetén $\vartheta_{3-i,k} - \vartheta_{3-i,k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ és $\vartheta_{3-i,k} - \vartheta_{3-i,k+1} = \ell_{3-i,k} \vartheta_{i,k} \geq \vartheta_i > 0$, $k=0,1,\dots$, ellentmondának egymásnak. Így $\vartheta_{i,k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $i=1,2$.

Q.e.d.

Néha használni fogjuk a

$$Q^* \doteq Q_\vee = \mathcal{D}^\vee Q$$

jelölést egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció \mathcal{D} -redukáltjának jelölésére. Ez mindig létezik és a /4.3/ különleges esetben

$$Q^* = 0,$$

a nulla-konfiguráció.

Vezessük be a következő mennyiségeket:

$$A_{-2}=0, \quad B_{-2}=1,$$

$$A_{-1}=1, \quad B_{-1}=0,$$

$$/4.24/ \quad A_{2k} = \ell_{1,k} A_{2k-1} + A_{2k-2}, \quad B_{2k} = \ell_{1,k} B_{2k-1} + B_{2k-2},$$

$$A_{2k+1} = \ell_{2,k} A_{2k} + A_{2k-1}, \quad B_{2k+1} = \ell_{2,k} B_{2k} + B_{2k-1},$$

$$k=0,1,\dots$$

$$/4.25/ \quad \xi_{2k} = \frac{\tau_{1,k}}{\tau_{2,k}}, \quad \xi_{2k+1} = \frac{\tau_{2,k}}{\tau_{1,k+1}}, \quad k=0,1, \dots, v-1,$$

$$/4.26/ \quad B'_k = \xi_k B_{k-1} + B_{k-2}, \quad k=0,1,\dots,$$

$$/4.27/ \quad \delta_k = \xi_0 - \frac{A_k}{B_k}, \quad k=0,1, \dots$$

Ezekre vonatkozóan igaz a következő lemma.

4.7. Lemma: Igazak az alábbi összefüggések:

$$/4.28/ \quad A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k = (-1)^{k-1}, \quad k=-1,0,1, \dots$$

$$/4.29/ \quad /A_k, A_{k-1}/, /B_k, B_{k-1}/, /A_k, B_k/ \text{ relativ prim párok}$$

$$/4.30/ \quad \delta_k = \frac{(-1)^k}{B_k B'_{k+1}}, \quad k=0,1, \dots$$

$$\tau_{1,k} = B_{2k-2} \tau_{1,0} - A_{2k-2} \tau_{2,0}$$

$$/4.31/ \quad \tau_{2,k} = -B_{2k-1} \tau_{1,0} + A_{2k-1} \tau_{2,0}, \quad k=0,1, \dots$$

$$\tau_{1,0} = A_{2k-1} \tau_{1,k} + A_{2k-2} \tau_{2,k} \quad k=0,1, \dots$$

$$/4.32/ \quad \tau_{2,0} = B_{2k-1} \tau_{1,k} + B_{2k-2} \tau_{2,k}$$

$$\begin{aligned} \tau_{1,0} &= A_{2k-1} \tau_{1,k+1} + A_{2k} \tau_{2,k} \\ /4.33/ \quad k &= 0, 1, \dots \\ \tau_{2,0} &= B_{2k-1} \tau_{1,k+1} + B_{2k} \tau_{2,k} . \end{aligned}$$

Bizonyítás: A /4.29/ következik a /4.28/-ből. /4.30/ a következőképpen igazolható /4.28/, /4.32/ és /4.33/ alapján:

$$\begin{aligned} \delta_{2k} &= \frac{\tau_{1,0}}{\tau_{2,0}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{A_{2k-1} \tau_{1,k+1} + A_{2k} \tau_{2,k}}{B_{2k-1} \tau_{1,k+1} + B_{2k} \tau_{2,k}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \\ &= \frac{-/A_{2k} B_{2k-1} - A_{2k-1} B_{2k} / \tau_{1,k+1}}{/B_{2k-1} \tau_{1,k+1} + B_{2k} \tau_{2,k} / B_{2k}} = \frac{1}{B_{2k} B'_{2k+1}} \\ \delta_{2k+1} &= \frac{\tau_{1,0}}{\tau_{2,0}} - \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} = \frac{A_{2k+1} \tau_{1,k+1} + A_{2k} \tau_{2,k+1}}{B_{2k+1} \tau_{1,k+1} + B_{2k} \tau_{2,k+1}} - \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} = \\ &= \frac{-/A_{2k+1} B_{2k} - A_{2k} B_{2k+1} / \tau_{2,k+1}}{/B_{2k+1} \tau_{1,k+1} + B_{2k} \tau_{2,k+1} / B_{2k+1}} = \frac{-1}{B_{2k+1} B'_{2k+2}} . \end{aligned}$$

Hátra van még a /4.28/, /4.31/-/4.33/ formulák igazolása. Ezt teljes indukcióval végezzük. $k=-1, 0$ értékekre a /4.24/ alapján /4.28/ ellenőrizhető. Ugyancsak /4.24/ alapján /4.31/-/4.33/ mindegyike azonossággá válik, tehát igaz. Tegyük fel, a formulák igazak k -ig bezárólag.

Bizonyítjuk $k+1$ -re. $l_{1,k}$ és $l_{2,k}$ egészek
/4.21/ szerinti értékei esetén a

$$\tau_{1,k} = l_{1,k} \tau_{2,k} + \tau_{1,k+1}$$

$$/4.34/ \quad \tau_{2,k} = l_{2,k} \tau_{1,k+1} + \tau_{2,k+1}$$

$$\tau_{1,k} = /1+l_{1,k} l_{2,k}/ \tau_{1,k+1} + l_{1,k} \tau_{2,k+1}$$

összefüggések mindig igazak, függetlenül attól,
hogy $l_{i,k}$ bármelyike 0 lehet. A /4.24/-/4.27/
definíciók is függetlenek $l_{i,k}$ értékek 0 voltá-
tól. Természetesen $\tau_{i,k}$ konstans, ha

$k > \nu$, és $A_{2k} = A_{2k-2}$, $B_{2k} = B_{2k-2}$, $A_{2k+1} = A_{2k-1}$,

$B_{2k+1} = B_{2k-1}$, ha $k > \nu$.

Használva a

$$b_{2k} = l_{1,k}, \quad b_{2k+1} = l_{2,k}, \quad k=0,1, \dots$$

jelöléseket

$$\begin{aligned} A_{k+1} B_k - A_k B_{k+1} &= /b_k A_k + A_{k-1} / B_k - A_k / b_k B_k + B_{k-1} / = \\ &= -/A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k / = -/-1/^{k-1} = -1/^{k-1} \end{aligned}$$

bizonyítja /4.28/-at.

/4.34/-et /4.32/-be helyettesítve

$$\begin{aligned}\tau_{1,0} &= A_{2k-1} / \ell_{1,k} \tau_{2,k} + \tau_{1,k+1} / + A_{2k-2} \tau_{2,k} = \\ &= / \ell_{1,k} A_{2k-1} + A_{2k-2} / \tau_{2,k} + A_{2k-1} \tau_{1,k+1} = \\ &= A_{2k-1} \tau_{1,k+1} + A_{2k} \tau_{2,k}\end{aligned}$$

bizonyítja /4.33/-at. A /4.34/-et /4.33/-ba helyettesítve

$$\begin{aligned}\tau_{1,0} &= A_{2k-1} \tau_{1,k+1} + A_{2k} / \ell_{2,k} \tau_{1,k+1} + \tau_{2,k+1} / = \\ &= / \ell_{2,k} A_{2k} + A_{2k-1} / \tau_{1,k+1} + A_{2k} \tau_{2,k+1} = \\ &= A_{2k+1} \tau_{1,k+1} + A_{2k} \tau_{2,k+1}\end{aligned}$$

bizonyítja /4.32/-t. A /4.31/ a /4.32/ megoldása $\tau_{1,k}, \tau_{2,k}$ változókra a /4.28/ felhasználásával.

Q.e.d.

1. Megjegyzés: Ez a lemma analóg eredményeket emel ki egy szám lánc törtfejtésében szereplő összefüggésekkel, amelyeket a 2.4. pontban soroltunk fel. A /4.30/ kivételével, ezeket később felhasználjuk.

2. Megjegyzés: A lemma formulái tetszőleges $Q=Q_0$ és tetszőleges k esetén érvényesek, függetlenül Q_0 elfajultságától, összetettségi fokától. Legfeljebb azonosságokat fejez ki. Ez azt jelenti, hogy a /4.28/- /4.33/ formulákban nem az indexek nagysága, hanem az

indexes mennyiségek nagysága a lényeges. Így elegendő azt tudnunk, hogy $k \geq v$, akkor ezek az összefüggések k tényleges értékétől függetlenül a Q_0 és a Q_v redukált konfiguráció jellemzői közötti összefüggést adják meg.

3. Megjegyzés: Miután a /4.34/ egyenletpár determinánsa 1, abból $\tau_{1,k+1}$, $\tau_{2,k+1}$ kifejezhetők a $\tau_{1,k}$ és $\tau_{2,k}$ segítségével:

$$\begin{aligned} /4.35/ \quad \tau_{1,k+1} &= \tau_{1,k} - l_{1,k} \tau_{2,k} \\ \tau_{2,k+1} &= -l_{2,k} \tau_{1,k} + (1 + l_{1,k} l_{2,k}) \tau_{2,k}. \end{aligned}$$

A 4.7. Lemma lehetővé teszi, hogy összefüggést nyerjünk egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció és a $Q_k \rightarrow Q$ transzformáltak ütemterveinek jellemzői között. Legyen S egy adott következetes természetes ütemezési stratégia, amely egyértelműen meghatározza minden konfigurációra a szabad első kritikus döntéseket.

Legyen

$$(R) = \{R_0, R_1, \dots\}$$

az $R_k = S(Q_k)$, $k=0,1, \dots$, ütemtervek sorozata az S stratégia szerint. A 4.2. Lemma szerint a következetes természetes S stratégiák száma hat, hiszen maximálisan három kritikus szituációban lehet két-két döntés közül szabadon választani. Az $s[0]$ első döntés az ütemezéseket két osztályra bontja, amelyben $Q^{(1)}$ és $Q^{(2)}$ job-folyamok szerepe pontosan fordított, ezért az egész \mathcal{Q} konfiguráció-téren elegendő az $s[0]=s_1$ első döntésű stratégiákat vizsgálni.

A 4.3. Tétel szerint az R_k ütemtervek jellemzőit
a

$$/4.36/ \quad 0 \leq B_{i,k} \tau_{i,k}^{-A_{i,k}} \tau_{3-i,k} \leq \eta, \quad i=1,2$$

egyenlőtlenség-pár legkisebb

$$/4.37/ \quad \omega_{i,k} \geq /1,0/$$

feltétel melletti $\omega_{i,k}^*$ megoldásai és azok $\Delta_{i,k}^*$ hibái határozzák meg. Vizsgáljuk meg a különböző k melletti megoldások egymás közötti kapcsolatát.

Legyen

$$/4.38/ \quad \Delta_{i,k} \doteq B_{i,k} \tau_{i,k}^{-A_{i,k}} \tau_{3-i,k}$$

a /4.36/ egy $\omega_{i,k}$ megoldásának hibája. Helyettesítsük itt a /4.34/ formulákat $i=1,2$ mellett. Ekkor

$$\Delta_{1,k} = / (1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k}) B_{1,k} - \ell_{2,k} A_{1,k} / \tau_{1,k+1} -$$

$$- / -\ell_{1,k} B_{1,k} + A_{1,k} / \tau_{2,k+1},$$

$$\Delta_{2,k} = / B_{2,k} - \ell_{1,k} A_{2,k} / \tau_{2,k+1} - / -\ell_{2,k} B_{2,k} + (1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k}) A_{2,k} / \tau_{2,k+1}.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$B_{1,k+1} = / 1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k} / B_{1,k} - \ell_{2,k} A_{1,k}$$

/4.39/

$$A_{1,k+1} = -\ell_{1,k} B_{1,k} + A_{1,k},$$

illetve

$$/4.39'/ \quad B_{2,k+1} = B_{2,k} - \ell_{1,k} A_{2,k}$$

$$A_{2,k+1} = -\ell_{2,k} B_{2,k} + /1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k}/ A_{2,k}$$

formulák a

$$/4.36'/ \quad 0 \leq B_{i,k+1} \tau_{i,k+1} - A_{i,k+1} \tau_{3-i,k+1} \leq \eta, \quad i=1,2,$$

egyenlőtlenségek egy-egy $\omega_{i,k+1}$, $i=1,2$, egyértelmű megoldását határozzák meg, amelynek

$$/4.38'/ \quad \Delta_{i,k+1} = B_{i,k+1} \tau_{i,k+1} - A_{i,k+1} \tau_{3-i,k+1}$$

hibája megegyezik a /4.38/ megfelelőjével, azaz

$$/4.40/ \quad \Delta_{i,k+1} = \Delta_{i,k}, \quad i=1,2, \quad k=0,1, \dots$$

Mivel a /4.39/ és /4.39'/ transzformációk determinánsa 1, ezért $\omega_{i,k+1}$ egyértelműen meghatározza a /4.36/ egy azonos hibával rendelkező megoldását a /4.39/ és /4.39'/-ből nyerhető

$$B_{1,k} = B_{1,k+1} + \ell_{2,k} A_{1,k+1}$$

/4.41/

$$A_{1,k} = \ell_{1,k} B_{1,k+1} + /1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k}/ A_{1,k+1}$$

$$B_{2,k} = /1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k}/ B_{2,k+1} + \ell_{1,k} A_{2,k+1}$$

/4.41'/

$$A_{2,k} = \ell_{2,k} B_{2,k+1} + A_{2,k+1}$$

formulák segítségével.

A 4.3. Tétel szerint R_k ütemtervek jellemzőit a /4.36/ egyenlőtlenségek /4.37/ feltétel melletti legkisebb megoldásai határozzák meg. Ezért ezek összefüggését kell vizsgálnunk. Először bizonyítunk egy lemmát.

4.8. Lemma: Valamely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció $Q_k, Q_{k+1} \in (Q)$, $k \geq 0$, transzformáltjaira a /4.36/ és /4.36'/ egyenlőtlenségek megoldásaira vonatkozólag a következők igazak:

/A/ A /4.39/ vagy /4.41/ és a /4.39'/ vagy /4.41'/ összefüggések egy-egyértelmű megfeleltetést létesítenek az egyenlőtlenségek $\omega_{i,k}$ és $\omega_{i,k+1}$, $i=1$, illetve 2, megoldásai között; a megfelelő megoldások hibája azonos:

$$\Delta_{i,k} = \Delta_{i,k+1}, \quad i=1,2;$$

/B/ Az $\omega_{i,k} = /0,0/$ és $\omega_{i,k+1} = /0,0/$ egymásnak felelnek meg;

/C/ Az $\omega_{i,k+1} > /0,0/$ halmaznak az $\omega_{i,k} > /0,0/$ részhalmaza felel meg és viszont, kivéve a

$$/4.42/ \quad Q_k = / \eta_1; \ell_{1,k} (\eta_2 + \ell_{2,k} \eta_1); \eta_2; \ell_{2,k} \eta_1 /$$

konfigurációt, amelynél

/a/ $\ell_{2,k} \eta_1 > 0$ esetén $i=2$ mellett az

$$\omega_{2,k} = /1 + \ell_{1,k} (\ell_{2,k} - 1), \ell_{2,k} - 1/ \geq /1,0/$$

megoldásnak az

$$\omega_{2,k+1} = /1, -1/$$

megoldás felel meg,

/b/ $\ell_{2,k} \eta_1 = 0$, $\ell_{1,k} \eta_2 > 0$ esetén $i=1$ mellett az

$$\omega_{1,k} = /1, \ell_{1,k}^{-1} \geq /1, 0/$$

megoldásnak az

$$\omega_{1,k+1} = /1, -1/$$

megoldás felel meg.

/D/ Az $\omega_{i,k+1} \geq /1, 0/$ halmaznak az $\omega_{i,k} \geq /1, 0/$ részhalmaza felel meg és viszont, kivéve a /C/ alatti kivételes eseteket és

/a/ $i=1$ esetben a

$$\begin{aligned} /4.43/ \quad Q_k = & / \eta_1; (1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k}) (\eta_1 + \vartheta_{1,k+1}) - \eta_1; \\ & 0; \ell_{2,k} (\eta_1 + \vartheta_{1,k+1}) / \end{aligned}$$

konfigurációt, ahol $\ell_{2,k} (\eta_1 + \vartheta_{1,k+1}) > 0$, és amelynél az

$$\omega_{1,k} = / \ell_{2,k} A_{1,k+1}, (1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k}) A_{1,k+1} / > /1, 0/,$$

$$/A_{1,k+1} > 0/,$$

megoldásoknak az

$$\omega_{1,k+1} = /0, A_{1,k+1} / > /0, 0/$$

megoldások felelnek meg,

/b/ $i=2$ esetben a

/4.43'/ $Q_k = /0; \ell_{1,k} (\eta_2 + \vartheta_{2,k+1}); \eta_2; \vartheta_{2,k+1}/$
konfigurációt, ahol $\ell_{1,k} (\eta_2 + \vartheta_{2,k+1}) > 0$, és amelynél
az $\omega_{2,k} = / \ell_{1,k} A_{2,k+1}, A_{2,k+1} / > /1, 0/$, $/A_{2,k+1} > 0/$,

megoldásoknak az

$$\omega_{2,k+1} = /0, A_{2,k+1} / > /0, 0/$$

megoldások felelnek meg.

/E/ /a/ A /C/a,b/ kivételes esetekben

$$Q_{k+1} = / \eta_1; 0; \eta_2; 0 / \text{ és az } \omega_{i,k+1}^* = /1, 0/$$

megoldása /4.36'/-nek, amelyhez a /4.41/ és /4.41'/
a /4.36/-nak az

$$/4.44/ \quad \omega_{1,k} = /1, \ell_{1,k} /,$$

illetve az

$$/4.44'/ \quad \omega_{2,k} = /1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k}, \ell_{2,k} /$$

megoldását rendeli. Ezekre a hibák

$$/4.45/ \quad \Delta_{1,k} = \Delta_{1,k+1} = \eta_1, \quad \Delta_{2,k} = \Delta_{2,k+1} = \eta_2.$$

/b/ A /D/a,b/ kivételes esetekben

$$/4.46/ \quad Q_{k+1} = / \eta_1; \vartheta_{1,k+1}; 0; 0 / , \text{ illetve}$$

$$Q_{k+1} = /0; 0; \eta_2; \vartheta_{2,k+1} / ,$$

és a /4.36'/-nek nincs $\omega_{i,k+1} \geq /1, 0/$ megoldása, ha
 $\vartheta_{i,k+1} > 0$.

$\mathfrak{J}_{i,k+1}=0$ esetben az $\omega_{i,k+1}^* = /1,0/$ megoldása a $/4.36'/$ -nak, amelynek a $/4.36/$ $/4.44/$ és $/4.44'/$ megoldásai felelnek meg a $/4.45/$ hibákkal.

Bizonyítás: Az $/A/$ állítást korábban már beláttuk:

a $/4.39/$ és $/4.39'/$ éppen úgy definiálja az $\omega_{i,k+1}$ megoldást, hogy $\Delta_{i,k} = \Delta_{i,k+1}$ legyen. Az egyértelműség következik abból, hogy a transzformációk determinánsa 1.

A $/B/$ állítás ugyanennek a ténynek a következménye.

A $/C/$ állítás első része következik a $/4.41/$ és $/4.41'/$ formulákból, amelyek szerint $\omega_{i,k}$ az $\omega_{i,k+1}$ monoton függvénye az általunk használt részben rendezési reláció szerint. Ugyanebből következik a $/D/$ állítás első része.

Most bizonyítjuk a $/C/$ állítás második részét, vagyis azt, hogy a $/4.39/$ és $/4.39'/$ az $\omega_{i,k} > /0,0/$ megoldásoknak $\omega_{i,k+1} > /0,0/$ megoldásokat feleltet meg az $/a/$ és $/b/$ kivételes eseteken kívül.

Ha a \mathfrak{D} operátor a Q_k konfigurációra hatástalan, akkor $\ell_{1,k} = \ell_{2,k} = 0$ és a $/4.39/-/4.41'/$ formulák azonosságokká válnak: $\omega_{i,k} = \omega_{i,k+1} > /0,0/$ egyszerre teljesül.

Legyen tehát \mathfrak{D} hatásos és $\omega_{i,k} > /0,0/$.
 $\omega_{i,k+1} \leq /0,0/$ lehetetlen, mert akkor a $/4.41/$, $/4.41'/$
 $\omega_{i,k} \leq /0,0/$ megoldást adna.

Legyen tehát $B_{i,k+1} A_{i,k+1} < 0$.
 A $B_{i,k+1} < 0$, $A_{i,k+1} > 0$ lehetetlen hiszen
 ekkor $\Delta_{i,k+1} = B_{i,k+1} \tau_{i,k+1} - A_{i,k+1} \tau_{3-i,k+1} \leq 0$

lenne, ami ellentmondás, mert $\tau_{i,k+1} = \tau_{3-i,k+1} = 0$ csak $\tau_{i,k} = \tau_{3-i,k} = 0$ esetben lehetne, amikor is \mathcal{D} hatástalan, vagy $\Delta_{i,k} = \Delta_{i,k+1} < 0$ lenne, ami ellentmond a /4.36/ egyenlőtlenségnek.

Marad tehát a $B_{i,k+1} > 0$, $A_{i,k+1} < 0$ eset. Ekkor

$$\Delta_{i,k+1} = B_{i,k+1} \tau_{i,k+1} - A_{i,k+1} \tau_{3-i,k+1} \geq \tau_{i,k+1} + \tau_{3-i,k+1} \geq \eta.$$

A $\Delta_{i,k} = \Delta_{i,k+1} > \eta$ ellentmond a /4.36/ egyenlőtlenségnek, így tehát

$$\Delta_{i,k} = \Delta_{i,k+1} = \eta$$

lehet csak. Ennek feltétele

$$/\ast/ \quad B_{i,k+1} = 1, \quad A_{i,k+1} = -1, \quad \mathcal{J}_{i,k+1} = 0, \quad \mathcal{J}_{3-i,k+1} = 0.$$

$\eta = 0$ kizárt, mert akkor $Q_k = Q_{k+1} = 0$ a nulla-konfiguráció lenne, amelyre \mathcal{D} hatástalan. Így $\eta > 0$.

A /4.41/ és /4.41'/-be az $\omega_{i,k+1} = /1, -1/$ értéket helyettesítve az

$$\begin{aligned} /\ast\ast/ \quad \omega_{1,k} &= /1 - \ell_{2,k}, \ell_{1,k} (1 - \ell_{2,k}) - 1/, \\ \omega_{2,k} &= /1 + \ell_{1,k} (\ell_{2,k} - 1), \ell_{2,k} - 1/ \end{aligned}$$

megoldásokat nyerjük.

Az $\omega_{1,k} > /0, 0/$ feltételből

$$\ell_{2,k} = 0, \quad \ell_{1,k} > 0 \quad \text{és} \quad \omega_{1,k} = /1, \ell_{1,k} - 1/ \geq /1, 0/$$

értékek adódnak.

Ebből a /~~3~~/ és a /4.21/ definíciók figyelembevételével

$$\vartheta_{2,k} = l_{2,k} \tau_{1,k+1} = 0, \quad \vartheta_{1,k} = l_{1,k} \tau_{2,k} = l_{1,k} \eta_2,$$

azaz $Q_k = / \eta_1, l_{1,k} \eta_2; \eta_2; 0 /$. $l_{1,k} \eta_2 > 0$, mert különben $\vartheta_{1,k} = 0$ lenne és Q_k -ra a \mathcal{D} hatástalan lenne. Ezzel a /C/b/ állítást bizonyítottuk.

Az $\omega_{2,k} > /0,0/$ feltételből

$l_{2,k} > 0$ adódik, ami maga után vonja $\omega_{2,k} \geq /1,0/$ reláció teljesülését. A /~~3~~/ és /4.21/ figyelembevételével

$$\vartheta_{2,k} = l_{2,k} \tau_{1,k+1} = l_{2,k} \eta_1; \quad \vartheta_{1,k} = l_{1,k} (\eta_2 + l_{2,k} \eta_1),$$

azaz $Q_k = / \eta_1; l_{1,k} (\eta_2 + l_{2,k} \eta_1); \eta_2; l_{2,k} \eta_1 /$.

$l_{2,k} \eta_1 > 0$, hiszen $l_{2,k} > 0$ feltétele $\omega_{2,k} > /0,0/$ -nak és $\eta_1 = 0$ esetén pedig $Q_k = /0; l_{1,k} \eta_2; \eta_2; 0/$ \mathcal{D} -redukciója nem eredményezne $l_{2,k} > 0$ hányadost. Ezzel a /C/a/ állítást is igazoltuk.

Együttal igazoltuk a /D/ állítás második részének a /C/ alatti kivételekre vonatkozó részét, mivel az $\omega_{i,k} > /0,0/$ feltétel maga után vonta az $\omega_{i,k} \geq /1,0/$ teljesülését mind a /C/a/, mind a /C/b/ esetben. Most azonban $\omega_{i,k+1} \geq /1,0/$ feltételét keressük, ezért meg kell vizsgálnunk az

$$\omega_{i,k+1} = /0, A_{i,k+1} / , \quad A_{i,k+1} > 0,$$

értékek feltételét is. Lehet-e ekkor $\omega_{i,k} \geq /1,0/$? Ha \mathcal{D} a Q_k -ra hatástalan, akkor biztosan nem. Egyébként a

$$\Delta_{i,k+1} = -A_{i,k+1} \tau_{3-i,k+1} \geq 0$$

feltételből

$$\tau_{3-i,k+1}=0 \quad \text{és} \quad \Delta_{i,k+1} = \Delta_{i,k}=0$$

feltételek következnek. Vagyis

$$\eta_{3-i}=0 \quad \text{és} \quad \vartheta_{3-i,k+1}=0.$$

Ha $\vartheta_{3-i,k}=0$ lenne, akkor \mathcal{D} hatástalan lenne Q_k -ra, ami kizárt. Tovább az $i=1$ és 2 eseteket külön kell vizsgálni. $\eta_{3-i}=0$ és $\vartheta_{3-i,k} > 0$ mindig igaz.

$i=1$ esetén

$$\eta_2=0, \quad \vartheta_{2,k} = \ell_{2,k} \tau_{1,k+1} > 0, \quad \tau_{1,k} = (\ell_{1,k} \ell_{2,k+1}) \tau_{1,k+1} > 0,$$

vagyis

$$Q_k = \eta_1; (1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k})(\eta_1 + \vartheta_{1,k+1}) - \eta_1; 0; \ell_{2,k}(\eta_1 + \vartheta_{1,k+1})/,$$

ahol $\ell_{2,k}(\eta_1 + \vartheta_{1,k+1}) > 0$. A /4.41/-ben $B_{1,k+1}=0$ helyettesítésével $\omega_{1,k} = \ell_{2,k} A_{1,k+1}, (1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k}) A_{1,k+1} /> /1,0/$ felel meg az $\omega_{i,k+1} = /0, A_{i,k+1} /> /0,0/$ megoldásnak. Ezzel a /D/a/ eset bizonyítva van.

$i=2$ esetén

$$\eta_1=0, \quad \vartheta_{1,k} = \ell_{1,k} \tau_{2,k} > 0, \quad \tau_{2,k} = \tau_{2,k+1} > 0,$$

vagyis

$$Q_k = /0; \ell_{1,k}(\eta_2 + \vartheta_{2,k+1}); \eta_2; \vartheta_{2,k+1} /,$$

ahol $\ell_{1,k}(\eta_2 + \vartheta_{2,k+1}) > 0$.

A /4.41'/-ben $B_{2,k+1}=0$ helyettesítésével
 $\omega_{2,k} = / \ell_{1,k} A_{2,k+1}, A_{2,k+1} / > /1,0/$ felel
 meg az $\omega_{i,k+1} = /0, A_{i,k+1} / > /0,0/$ megoldásnak.
 Ezzel a /D/b/ eset is bizonyítva van.

Bizonyítjuk az /E/ állítást. A /4.42/ konfigurációra a \mathcal{D} operátort alkalmazva valóban a

$Q_{k+1} = / \eta_1; 0; \eta_2; 0 /$ elfajult redukált konfigurációt nyerjük, amelynél a /4.36'/ legkisebb $\geq /1,0/$ megoldása valóban $\omega_{i,k+1}^* = /1,0/$, amelyet a /4.41/ és /4.41'/-be helyettesítve a /4.44/ illetve /4.44'/ megoldásokat nyerjük.

A /4.45/ triviális.

A \mathcal{D} operátort a /4.43/ és /4.43'/ konfigurációkra alkalmazva a /4.46/ szerinti degenerált konfigurációkat kapjuk redukált konfigurációként.

A $\vartheta_{i,k+1} > 0$ esetben a /4.4/ feltételekhez jutunk, amikor is a /4.36'/-nek valóban nincs $\geq /1,0/$ megoldása. $\vartheta_{i,k+1} = 0$ esetén a /4.36'/ legkisebb megoldása $\geq /1,0/$ feltétel mellett az $\omega_{i,k+1}^* = /1,0/$, amelyhez a /4.44/ illetve /4.44'/ megoldások és /4.45/ hibák adódnak. Ezzel az /E/ állításunkat is bizonyítottuk.

Q.e.d.

1. Megjegyzés: A 4.8. Lemma /C/ állításában szereplő /4.42/ kivételes konfigurációra a /4.36/ egyenlőtlenségnek a szereplő $\omega_{i,k} \geq /1,0/$ megoldásai minimálisak e feltétel mellett és a bizonyításban láttuk, hogy hibájuk $\Delta_{i,k} = \eta$. Ekkor az R_k ütemterv a 4.3. Tétel jelölései szerint $R_{i,3-i,i}$ típusú, ugyanis a $\Delta_{i,k}^* = \eta$

egy β_{3-i} -szituáció fellépését, a /4.44/ ill. /4.44'/ megoldás a $\Delta_{i,k} = \eta_i$ miatt a σ_0 kritikus szituáció visszatérését jelenti.

2. Megjegyzés: A /4.43/ és /4.43'/ konfigurációknál a /4.36/ legkisebb $\geq /1,0/$ megoldása

$$\omega_{1,k}^* = /l_{2,k}, 1 + l_{1,k} l_{2,k} / , \text{ illetve } \omega_{2,k}^* = /l_{1,k}, 1 / ,$$

amelyekhez az $\omega_{i,k+1} = /0,1/$ megoldások tartoznak.

$\Delta_{i,k}^* = 0$ miatt az R_k ütemtervek típusa $R_{i,i,i}$, hiszen benne a β_i -szituáció tér vissza periodikusan.

3. Megjegyzés: A /4.42/, /4.43/ és /4.43'/ konfigurációk kivételével a /4.39/- /4.41'/ transzformációk az

$$\omega_{i,k} \geq /1,0/ \quad \text{és} \quad \omega_{i,k+1} \geq /1,0/$$

halmazokat egymásba képezik le, ezért a minimális $\omega_{i,k}^*$ és $\omega_{i,k+1}^*$ megoldások között is fennállnak a /4.39/-/4.41'/ összefüggések. A kivételes esetekben $\omega_{i,k+1} \geq /1,0/$ vagy nem is létezik, vagy a minimális $\omega_{i,k+1}^*$ megoldásnak megfelelő $\omega_{i,k} \geq /1,0/$ megoldás nem minimális.

4.5. Tétel: Egy tetszőleges $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció

$$Q_k = \mathcal{D}^k Q, \quad k=0,1,\dots$$

transzformáltjai (Q) sorozatának bármely S következetes természetes stratégia szerinti

$$R_k \in S(Q_k), \quad k=0,1,\dots$$

ütemtervei (R) sorozatában

/i/ a tagok egyszerre periodikusak a /4.3/ különleges eset kivételével

/ii/ a 4.3. Tétel meghatározta \prod_k jellemzők között fennállnak az alábbi összefüggések / $k=0,1,\dots$ /:

/a/ az

$$U_{i,k} \doteq U_i, \quad i=1,2,$$

jellemzők /késleltetések/ minden k -ra azonosak,

/b/ az

R_k és R_{k+1} ciklusszámaira

$$\mu_{1,k+1} = (1 + l_{1,k} l_{2,k}) \mu_{1,k} - l_{2,k} \mu_{2,k}$$

/4.47/

$$\mu_{2,k+1} = -l_{1,k} \mu_{1,k} + \mu_{2,k}$$

$$\mu_{1,k} = \mu_{1,k+1} + l_{2,k} \mu_{2,k+1}$$

/4.48/

$$\mu_{2,k} = l_{1,k} \mu_{1,k+1} + (1 + l_{1,k} l_{2,k}) \mu_{2,k+1}$$

/c/ az R_0 és R_k ciklusszámaira

$$\mu_{1,k} = A_{2k-1} \mu_{1,0} - B_{2k-1} \mu_{2,0}$$

/4.49/

$$\mu_{2,k} = -A_{2k-2} \mu_{1,0} + B_{2k-2} \mu_{2,0}$$

$$\begin{aligned} \mu_{1,0} &= B_{2k-2} \mu_{1,k} + B_{2k-1} \mu_{2,k} \\ /4.50/ \\ \mu_{2,0} &= A_{2k-2} \mu_{1,k} + A_{2k-1} \mu_{2,k} \end{aligned}$$

Bizonyítás: A KT ütemtervek jellemzőit a 4.3. Tétel szolgáltatja. Ha a \mathcal{D} operátor a $Q = Q_0$ konfigurációra hatástalan, akkor $Q_k \equiv Q_0$ és $R_k \equiv R_0$. $\ell_{1,k} = \ell_{2,k} = 0$ $k=0,1,\dots$ folytán a /4.47/-/4.50/ azonosságokká válnak, tehát igazak. Tegyük fel tehát, hogy \mathcal{D} hatásos a Q_0 -ra, és Q_k -ra ha R_k és R_{k+1} kapcsolatát vizsgáljuk.

Vagyis legyen $Q_k \neq Q_0$ és $Q_{k+1} \neq Q_k$.

Tételünk /i/ állítása következik a 4.3. Tétel /i/ állításából, ugyanis a /4.3/ különleges feltevétel invariáns a \mathcal{D} operátor alkalmazásával szemben. Márpedig ez a feltétele, hogy bármelyik R ütemterv ne legyen periodikus.

Vegyük észre, hogy a /4.39/-/4.41'/ összefüggésekben az $\omega_{i,k}$ és $\bar{\omega}_{3-i,k}$ megoldások szerepe teljesen azonos. A 4.3. Tétel /iii/ állítása szerint abban az esetben, ha a /4.36/ egyenlőtlenségnek $i=1$ és 2 mellett egyaránt van $\omega_{i,k} \geq 1,0$ megoldása, akkor az R_k ütemtervek jellemzőit az $\omega_{i,k}^*$ és $\bar{\omega}_{3-i,k}^*$, legkisebb ilyen megoldások és ezek

$\Delta_{i,k}^*$ és $\Delta_{3-i,k}^*$ hibái határozzák meg. A /4.9/ összefüggések mutatják, hogy

$$\mu_{a,k}^{(a)} = \alpha B_{a,k}^* + \beta A_{3-a,k}^*$$

$$\mu_{3-a,k}^{(a)} = \alpha A_{a,k}^* + \beta B_{3-a,k}^*,$$

ahol α és β értéke 0 vagy 1, mindkét egyenletben azonos.

Az $U_{j,k}^{(a)}$ késleltetések a $\Delta_{i,k}^*$ hibáktól függenek.

Ha tehát $\omega_{i,k}^*$ és $\omega_{i,k+1}^*$, $i=1,2$, legkisebb megoldások között is fennállnak a /4.39/-/4.41'/ összefüggések, akkor ebből következik, hogy az /ii/a,b/ állításaink igazak. A /ii/c/ állítás teljes indukcióval következik a /ii/b/ állításból. A 4.8. Lemma utáni 3. Megjegyzés szerint a /4.42/-/4.43'/ kivételes konfigurációkon kívül az $\omega_{i,k}^*$ és $\omega_{i,k+1}^*$ között a /4.39/-/4.41'/ igaz. Csupán a kivételes konfigurációkat kell tehát még megvizsgálnunk. A /4.43/ és /4.43'/ esetek egyben a 4.3. Tétel /ii/ esetére vezető konfigurációk is, vagyis képviselik azt az esetet, amikor Q_{k+1} -re /4.36'/-nek nincs

$\omega_{i,k+1} \geq 1,0/$ megoldása.

A 4.8. Lemma utáni 1. Megjegyzés szerint a /4.42/ kivételes konfigurációnál az $s[o]=s_i$ első döntésű ütemtervek $R_{i,3-i,i}$ típusúak, amelyeknél a 4.3. Tétel /4.9/c/ formulái szerint a jellemzők

$$/\mu_{i,k}, \mu_{3-i,k}/ = \omega_{i,k}^* + \bar{\omega}_{3-i,k}^*$$

$$/U_i, U_{3-i}/ = / \eta - \Delta_{i,k}^*, \eta - \Delta_{3-i,k}^* /.$$

A /4.42/ konfigurációknál az $\omega_{i,k}^*$ megoldások az $\omega_{i,k+1} = /1,-1/$ megfelelői és adottak. Az $\omega_{3-i,k}^*$ megoldások pedig könnyen meghatározhatók.

A megoldások

$$i=1: \omega_{1,k}^* = /1, \ell_{1,k}^{-1} / , \omega_{2,k}^* = /1, 0 /$$

$$i=2: \omega_{1,k}^* = /1, \ell_{1,k} / , \omega_{2,k}^* = /1 + \ell_{1,k}(\ell_{2,k}^{-1}), \ell_{2,k}^{-1} / .$$

A megoldások hibái rendre

$$i=1: \Delta_{1,k}^* = \eta ; \quad \Delta_{2,k}^* = \eta_2 ;$$

$$i=2: \Delta_{1,k}^* = \eta_1 ; \quad \Delta_{2,k}^* = \eta .$$

Ezek alapján a

$$\Pi_k \doteq / \mu_{1,k} ; \mu_{2,k} ; U_1 ; U_2 /$$

jellemzők a fentebbiek szerint

$$i=1: \Pi_k = /1; \ell_{1,k} ; 0 ; \eta_1 / ,$$

$$i=2: \Pi_k = / \ell_{2,k} ; 1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k} ; \eta_2 ; 0 / .$$

A /4.42/ konfigurációknál $Q_{k+1} = / \eta_1 ; 0 ; \eta_2 ; 0 /$, amelyek ütemtervei R_{iii} típusúak és jellemzőiket a 4.3. Tétel /4.9/a/ formulái szolgáltatják. Figyelembe véve, hogy a /4.36'/ megoldásai $\omega_{i,k+1}^* = /1, 0 /$,

$\Delta_{i,k+1}^* = \eta_i$ hibákkal, az R_{k+1} ütemterv jellemzői:

$$i=1: \Pi_{k+1} = /1; 0 ; 0 ; \eta_1 / ,$$

$$i=2: \Pi_{k+1} = /0; 1 ; \eta_2 ; 0 / .$$

Könnyű látni, hogy a Π_k, Π_{k+1} párok kielégítik az /ii/a,b/ összefüggéseket és az /ii/c/ ismét az /ii/b/-ből következik teljes indukcióval.

Hátra van még a /ii/ állításaink bizonyítása a /4.43/ és /4.43'/ kivételes konfigurációkra. Ezeknél a Q_{k+1} -re a /4.36'/-nek nincs $\omega_{i,k+1} \geq 1,0/$ megoldása. A 4.8. Lemma utáni 2. Megjegyzés szerint az R_k ütemterv típusa R_{iii} , hiszen $\Delta_{i,k}^* = 0$ miatt a β_i -szituáció tér vissza és nincsen kritikus szituáció. Az $\omega_{i,k}^*$ megoldások figyelembevételével R_k jellemzői:

$$i=1: \quad \Pi_{k+1} = /0; 1; 0; 0/,$$

$$i=2: \quad \Pi_{k+1} = /1; 0; 0; 0/.$$

A Π_k, Π_{k+1} párok azonban itt is eleget tesznek az /ii/a,b/ összefüggéseknek és következésképpen az /ii/c/ állítás is teljesül.

A tétel bizonyítása ezzel teljes.

Q.e.d.

1. Megjegyzés: A 4.5. Tétel /ii/a,b/ összefüggéseinek szemléletes értelmezéséhez tekintsük a Q_k nem redukált konfiguráció R_k ütemtervét. Az R_k ütemterv minden olyan szakaszából, amelyen B_1 -task kiszolgálása folyik, hagyjunk ki egybefüggően egy $\ell_{1,k} \tau_{2,k}$ hosszúságú szakaszt /félig zárt intervallumot/. Ezzel az eljárással az R_k minden periodusából $\mu_{1,k} \ell_{1,k} C_2$ -ciklust hagyunk ki és a periodus $\mu_{1,k} \ell_{1,k} \tau_{2,k}$ hosszúsággal csökkent.

Mivel Q_k nem redukált, ezért a 4.3. Tétel szerint R_k periodushossza biztosan

$$p_k = \mu_{1,k} \tau_{1,k} + U_1 = \mu_{2,k} \tau_{2,k} + U_2$$

alakú. A fenti transzformáció a periodicitást nem rontja el és a nyert R'_k ütemterv éppen a

$$Q'_k = / \eta_1; \gamma_{1,k+1} ; \eta_2; \gamma_{2,k} /$$

konfiguráció megfelelő ütemterve lesz

$$\begin{aligned} p'_k &= p_k - \mu_{1,k} \ell_{1,k} \tau_{2,k} = \\ &= \mu_{1,k} \tau_{1,k+1} + U_1 = (\mu_{2,k} - \ell_{1,k} \mu_{1,k}) \tau_{2,k} + U_2 \end{aligned}$$

periodushosszal. Az $R_k \rightarrow R'_k$ transzformáció nyilván megtartja az ütemterv egyéb jellegzetességeit is: összefüggőség, következetesség, természetesség, esetleg szorosság, stb. A transzformáció a jellegzetes σ^* szituációkat is érintetlenül hagyja. Ebből következik, hogy az U_1 és U_2 késleltetések nagysága sem változik.

Hagyjunk most ki az R'_k ütemterv minden olyan szakaszából, amelyen B_2 -task kiszolgálása folyik, egybefüggően egy $\ell_{2,k} \tau_{1,k+1}$ hosszúságú szakaszt. Ekkor minden periodusból $(\mu_{2,k} - \ell_{1,k} \mu_{1,k}) \ell_{2,k} \tau_{1,k+1}$ hosszúságú szakaszt hagytunk el C_1 -ciklusok formájában. Az így nyert ütemterv éppen a Q_{k+1} konfiguráció R_{k+1} ütemterve lesz.

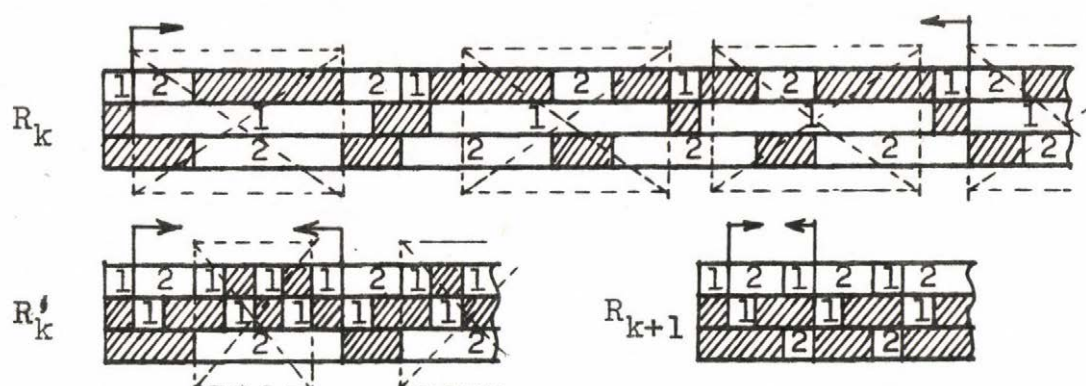
Ennek periodushossza

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k' - (\mu_{2,k} - l_{1,k} \mu_{1,k}) l_{2,k} \tau_{1,k+1} = \\ &= (1 + l_{1,k} l_{2,k}) \mu_{1,k} - l_{2,k} \mu_{2,k} / \tau_{1,k+1} + U_1 = \\ &= (\mu_{2,k} - l_{1,k} \mu_{1,k}) \tau_{2,k+1} + U_2. \end{aligned}$$

Összevetve ezt a 4.3. Tétel szerinti formulával, ami

$$/*/ \quad p_{k+1} = \mu_{1,k+1} \tau_{1,k+1} + U_1 = \mu_{2,k+1} \tau_{2,k+1} + U_2,$$

éppen a /4.47/ formulákat és a /ii/a/ állítás igazolását nyerjük abban az esetben, ha R_{k+1} -re is a 4.3. Tétel /iii/ állítása érvényes. Amikor a 4.3. Tétel /ii/ esete áll fenn, akkor a /iv/ állításban szereplő formulák δ nélküli része a 3. Fejezetbeli 2. Megállapodás követelménye nélküli degenerált ütemterv jellemzőit adná meg, amely a 4.5. Tétel bizonyítása szerint is a /4.47/ és /4.48/-ban érvényes ciklusszámokat képviseli. Ilyen esetben a /*/ alatti p_{k+1} nem a tényleges periodushosszat szolgáltatja, hanem ehhez hozzá kell adni $\delta \tau_j$ mennyiséget, ahol $\delta = 1 - \text{sgn } \tau_1 \tau_2$. Az $R_k \rightarrow R'_k \rightarrow R_{k+1}$ transzformációt a 4.7. Ábra szemlélteti.



4.7. Ábra: Az R_{k+1} ütemterv származtatása R_k -ből.

2. Megjegyzés: A 4.5. Tétel szerint a \mathcal{D} -redukciós lépések folyamán az R_k ütemtervek jellege nem változik, legalábbis ami az U_1 és U_2 késleltetések nagyságát illeti. Ha azonban egy $R_k \rightarrow R_{k+1}$ lépésnél egy $\vartheta_{i,k} > 0$ paraméter $\vartheta_{i,k+1} = 0$ értékre változott, akkor megváltozhat a szabad első jellegzetes szituációk típusa és ilymódon az R_{a_1, a_2, a_3} ütemtervjelleg is változhat. Ekkor azonban már legfeljebb egy $\ell_{i,j}$ hányados lehet pozitív /a következő/ és Q_{k+1} , vagy Q_{k+2} redukálttá válik. Erre láttunk példát a 4.8. Lemmában a /4.42/- /4.43'/ kivételes konfigurációknál. Erről a kérdésről még szó lesz.

3. Megjegyzés: Amint a /4.34/ alapján a /4.32/, a /4.48/ alapján a /4.50/ bizonyítható volt teljes indukcióval, ugyanugy a /4.41/ és /4.41'/ alapján igazolhatjuk az alábbi /4.52/ és /4.52'/ összefüggéseket teljes indukcióval, abból pedig megoldással kapjuk az alábbi /4.51/ és /4.51'/ összefüggéseket.

$$B_{1,k} = A_{2k-1} B_{1,0} - B_{2k-1} A_{1,0}$$

/4.51/

$$A_{1,k} = -A_{2k-2} B_{1,0} + B_{2k-2} A_{1,0}$$

$$\begin{aligned} B_{2,k} &= B_{2k-2} B_{2,o} - A_{2k-2} A_{2,o} \\ /4.51/ \\ A_{2,k} &= -B_{2k-1} B_{2,o} + A_{2k-1} A_{2,o} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{1,o} &= B_{2k-2} B_{1,k} + B_{2k-1} A_{1,k} \\ /4.52/ \\ A_{1,o} &= A_{2k-2} B_{1,k} + A_{2k-1} A_{1,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{2,o} &= A_{2k-1} B_{2,k} + A_{2k-2} A_{2,k} \\ /4.52'/ \\ A_{2,o} &= B_{2k-1} B_{2,k} + B_{2k-2} A_{2,k} \end{aligned}$$

4. Megjegyzés: A /4.47/ - /4.50/ összefüggések hasonlóságot mutatnak egyéb jellemzők között korábban bizonyított összefüggésekkel. Ez nem véletlen, hanem annak következménye, hogy a $\tau_{i,k}$ igények és $\mu_{i,k}$ ciklusszámok a /4.36/ egyenlőtlenség megoldásain keresztül speciális kapcsolatban vannak. Tekintsük ugyanis a /4.36/-nak pl. $i=1$ mellett egy $\omega_{1,k}$ megoldását, amelynek hibája $\Delta_{1,k}$. Ekkor

$$/4.53/ \quad B_{1,k} \tau_{1,k} - A_{1,k} \tau_{2,k} = \Delta_{1,k}.$$

E kifejezés baloldala a

$$/4.54/ \quad \underline{\tau}_k = \begin{pmatrix} \tau_{1,k} \\ -\tau_{2,k} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\omega}_{1,k} = \begin{pmatrix} B_{1,k} \\ A_{1,k} \end{pmatrix}$$

vektorok skaláris szorzata.

Ha $(\underline{x}, \underline{y})$ jelöli az \underline{x} és \underline{y} vektorok skaláris szorzatát és $\underline{y} = \underline{D}\underline{y}'$, ahol \underline{D} egy lineáris operátor /mátrixa/ akkor

$$(\underline{x}, \underline{D}\underline{y}') = (\underline{D}^T \underline{x}, \underline{y}') = (\underline{x}', \underline{y}')$$

ahol $\underline{x}' = \underline{D}^T \underline{x}$, \underline{D}^T a \underline{D} operátor adjungáltjának mátrixa, a \underline{D} transzponáltja.

Bevezetve $k=0, 1, \dots$ indexekre a

$$/4.55/ \quad \underline{D}_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & \ell_{1,k} \\ \ell_{2,k} & 1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k} \end{pmatrix}$$

$$/4.56/ \quad \underline{D}_k = \begin{pmatrix} B_{2k-2} & A_{2k-2} \\ B_{2k-1} & A_{2k-1} \end{pmatrix}$$

mátrixokat, a 4.7. Lemma, illetve /4.34/ és /4.35/ szerint

$$/4.57/ \quad \underline{\tau}_k = \underline{D}_k \underline{\tau}_0, \quad \underline{\tau}_{k+1} = \underline{D}_{k,k+1} \underline{\tau}_k$$

$$/4.57'/ \quad \underline{\tau}_0 = \underline{D}_k^{-1} \underline{\tau}_k, \quad \underline{\tau}_k = \underline{D}_{k,k+1}^{-1} \underline{\tau}_{k+1}$$

A /4.57/ figyelembevételével /4.53/-ból

$$\begin{aligned} \Delta_{1,k} &= (\underline{\omega}_{1,k}, \underline{\tau}_k) = (\underline{\omega}_{1,k}, \underline{D}_{k,k+1}^{-1} \underline{\tau}_{k+1}) = \\ &= (\underline{D}_{k,k+1}^T \underline{\omega}_{1,k}, \underline{\tau}_{k+1}) = (\underline{\omega}_{1,k+1}, \underline{\tau}_{k+1}) = \Delta_{1,k+1} \end{aligned}$$

és

$$\Delta_{1,k} = (\underline{\omega}_{1,k}, \underline{\tau}_k) = (\underline{\omega}_{1,k}, \underline{D}_k \underline{\tau}_0) = \\ = (\underline{D}_k^T \underline{\omega}_{1,k}, \underline{\tau}_0) = (\underline{\omega}_{1,0}, \underline{\tau}_0) = \Delta_{1,0},$$

ahol $\underline{D}_{k,k+1}^{-T}$ a $\underline{D}_{k,k+1}$ mátrix inverzének transzponáltja.
A /4.41/ és /4.39/ szerint ugyanis

$$\text{/4.58/} \quad \underline{D}_{k,k+1}^T \underline{\omega}_{1,k+1} = \underline{\omega}_{1,k} \quad \text{és} \quad \underline{\omega}_{1,k+1} = \underline{D}_{k,k+1}^{-T} \underline{\omega}_{1,k}$$

és a /4.52/ és /4.51/ szerint

$$\text{/4.58'/} \quad \underline{D}_k^T \underline{\omega}_{1,k} = \underline{\omega}_{1,0} \quad \text{és} \quad \underline{\omega}_{1,k} = \underline{D}_k^{-T} \underline{\omega}_{1,0}.$$

A fenti skaláris szorzatokban $\underline{\omega}_{1,k}$ helyett az

$$\text{/4.54'/} \quad \underline{\bar{\omega}}_{2,k} = \begin{pmatrix} A_{2,k} \\ B_{2,k} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\mu}_k = \begin{pmatrix} \mu_{1,k} \\ \mu_{2,k} \end{pmatrix}$$

vektorokat is használhatjuk, csupán $\Delta_{1,k} = \Delta_{1,0}$ helyett
- $\Delta_{2,k} = -\Delta_{2,0}$, illetve $U_2 - U_1$ konstansokat kell szerepeltetni. Ez a /4.39'/, /4.41'/, /4.51'/, /4.52'/ és a /4.47/ - /4.50/ összefüggésekből következik.

Összefoglalva: ha

$$\underline{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{pmatrix}$$

vektor az $\underline{\omega}_{1,k}$, $\underline{\bar{\omega}}_{2,k}$ és $\underline{\mu}_k$ vektorok bármelyike, akkor

$$\text{/4.59/} \quad \underline{x}_k = \underline{D}_k^{-T} \underline{x}_0, \quad \underline{x}_{k+1} = \underline{D}_{k,k+1}^{-T} \underline{x}_k,$$

$$/4.59'/ \quad \underline{x}_0 = \underline{D}_k^T \underline{x}_k, \quad \underline{x}_k = \underline{D}_{k,k+1}^T \underline{x}_{k+1}.$$

A /4.55/ és /4.56/ mátrixokra egyébként még igazak a következők:

$$/4.55'/ \quad \underline{D}_{k,k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \ell_{1,k} \ell_{2,k} & -\ell_{1,k} \\ -\ell_{2,k} & 1 \end{pmatrix}$$

$$/4.56'/ \quad \underline{D}_k^{-1} = \begin{pmatrix} A_{2k-1} & -A_{2k-2} \\ -B_{2k-1} & B_{2k-2} \end{pmatrix}$$

$$/4.60/ \quad \underline{D}_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell_{2,k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{1,k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$/4.61/ \quad \underline{D}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \doteq \underline{I}$$

$$/4.62/ \quad \underline{D}_{k+1} = \underline{D}_{k,k+1} \underline{D}_k$$

$$/4.63/ \quad \det(\underline{D}_{k,k+1}) = \det(\underline{D}_k) = 1.$$

Ha a \mathcal{D} operátor a Q_k konfigurációra hatástalan, akkor

$$/4.64/ \quad \underline{D}_{k,k+1} = \underline{I}, \text{ és } \underline{D}_{k+1} = \underline{D}_k, \text{ ha } \ell_{1,k} = \ell_{2,k} = 0.$$

5. Megjegyzés: A 4.5. Tétel alapján bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció bármely $S(Q)$ következetes természetes ütemtervének a jellemzőit meghatározhatjuk a

$$Q_v = \mathcal{D}^v Q$$

redukáltjának /ha létezik/ $R_v = S(Q_v)$ ütemterve jellemzőiből, ha azokat és az

$$A_{2v-2}, B_{2v-2}, A_{2v-1}, B_{2v-1}$$

mennyiségeket ismerjük. Ezek a /4.56/ alatt definiált mátrixok közül a

$$/4.65/ \quad \underline{\underline{D}} \doteq \underline{\underline{D}}_v = \begin{pmatrix} B_{2v-2} & A_{2v-2} \\ B_{2v-1} & A_{2v-1} \end{pmatrix}$$

mátrix elemei.

A következőkben ezért először a redukált konfigurációk KT ütemterveinek vizsgálatával foglalkozunk, majd a \mathcal{D} -redukció végrehajtásával a $\underline{\underline{D}}$ mátrix elemeinek meghatározásához adunk meg algoritmust.

4.3. \mathcal{D} -redukált konfigurációk KT ütemtervei.

Az előző pont eredményei azt mutatják, hogy a \mathcal{D} -redukció valóban egy alternatív utat szolgáltat bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció KT ütemtervei jellemzőinek meghatározásához azzal az uttal szemben, amely a /4.5/ egyenlőtlenségek direkt megoldásán és a 4.3. Tételen alapszik. Ez az alternatív ut a 4.5. Tétel alapján történő meghatározása az ütemterv jellemzőinek a redukált konfiguráció ütemterveinek jellemzőiből.

Ennél a módszernél két szempontot kell szem előtt tartani: Az egyik az, hogy redukció közben az ütemterv első három jellegzetes döntéssel jellemzett $R_{a_1 a_2 a_3}$ típusa megváltozhat. A másik az, hogy a 4.5. Tétel alkalmazásához a 3. Fejezet 2. Megállapodását, mint ütemezési korlátozást nem szabad figyelembe venni /degenerált job-folyam ciklusai ütemezhetők egymás után/.

A \mathcal{D} -redukciós módszer alkalmazásának előnye a 4.3. Tétellel szemben az is, hogy a könnyebben áttekinthető redukált ütemtervek jobban feltárják a KT ütemtervek jellege és a konfiguráció paramétereinek viszonya közötti összefüggéseket. Ez indokolja azt, hogy a \mathcal{D} -redukált konfigurációk KT ütemterveinek jellemzőit tüzetesebben vizsgáljuk. Természetesen azok is a 4.3. Tétel, azaz a /4.5/ egyenlőtlenségek megoldásai alapján határozhatók meg. Azonban általában a /4.5/ egyenlőtlenségek megoldásai redukált konfigurációnál nem igénylik az általános módszereket, amelyeket a 2. Fejezetben koincidencia-feladatok megoldására használtunk. Legtöbbször az ütemtervek jellemzői szemléletesen evidensek és a \mathcal{Q} konfigurációtér olyan tartományokra bontható egyszerűen, ahol a KT ütemtervek jellemzői állandók.

A Q konfigurációtér az R^4 négydimenziós euklideszi tér R_+^4 nem-negatív tizenhatoda. Ezt és tartományait alterek sorozatával, illetve a sorozat jellegzetes tagjainak ábrázolásával szemléltethetjük.

Vezessük be az

$$/4.66/ \quad x_i = \vartheta_i - \eta_{3-i}, \quad i=1,2,$$

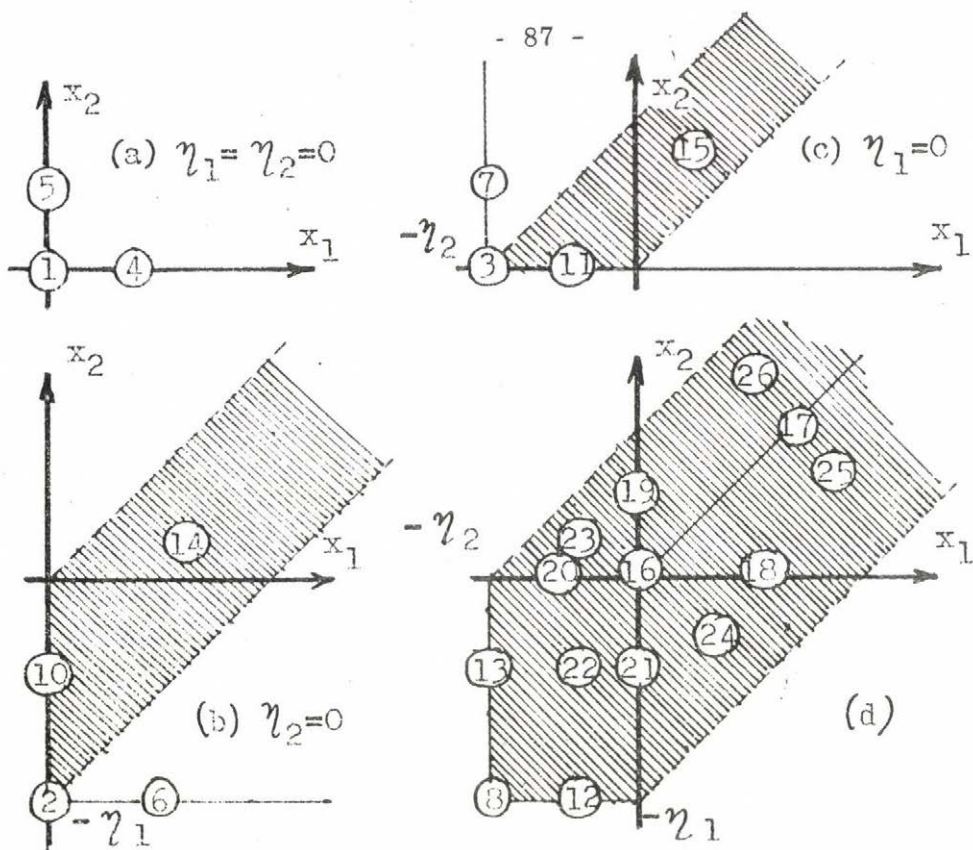
változókat. Ábrázoljuk az $/x_1, x_2/$ koordinátákat derékszögű koordinátarendszerben.

A redukáltság /4.18/ feltétele most a

$$-\eta_2 \leq x_1 < x_2 + \eta_1, \quad -\eta_1 \leq x_2 < x_1 + \eta_2 \quad \text{vagy}$$

$$/4.67/ \quad (x_1 + \eta)(x_2 + \eta) = 0$$

feltétellé transzformálódik. Rögzített $/\eta_1, \eta_2/$ mellett a /4.67/ feltételnek megfelelő tartományokat az (x_1, x_2) koordinátarendszerben a 4.8. Ábra mutatja. Az (x_1, x_2) sík $x_i \geq \eta_{3-i}$ negyede megfelel a Q konfigurációtér $Q_{\eta_1, \eta_2} \subset Q$ alterének, amelyet az $/\eta_1, \eta_2/$ koordináták rögzített értéke jelöl ki. Négy jellegzetes $/\eta_1, \eta_2/$ értékpárat választottunk ki, amelyek az összes specialitást jelképezik és a redukált konfiguráció-tartományok részeit megszámoztuk későbbi hivatkozás érdekében.



4.8. Ábra: A \mathcal{D} -redukált konfigurációk tartományai az $/x_1, x_2/ \geq /-\gamma_1, -\gamma_2/$ alterekben.

Jelölje $\mathcal{Q}_D \subset \mathcal{Q}$ a redukált konfigurációk halmazát. A 4.8/(a)-(d) Ábrákon bekarikázott számok jeleznek minden olyan pontot és vonalat, amely hozzátartozik a \mathcal{Q}_D halmazhoz. A szaggatott vonalak és nem kótázott határpontok nem tartoznak \mathcal{Q}_D -höz. Látni fogjuk, hogy az $\textcircled{1} - \textcircled{26}$ halmazok majdnem mindegyikén eltér a KT ütemtervek együttesének valamely jellemzője a többitől. Azonos az ütemtervek és jellemzőik paramétereiktől való függése a következő halmaz-párokon:

$$\textcircled{4} \div \textcircled{6} \quad , \quad \textcircled{5} \div \textcircled{7} \quad , \quad \textcircled{10} \div \textcircled{13} \quad , \quad \textcircled{11} \div \textcircled{12} \quad , \quad \textcircled{14} \div \textcircled{25} \quad \text{és} \quad \textcircled{15} \div \textcircled{26} \quad .$$

Az egyes halmazokon azonban már a KT ütemtervek azonos típusúak, amelyek jellemzői \mathcal{Q} paramétereitől azonos módon függnék. Ez alól csak a $\textcircled{14}$, $\textcircled{15}$, $\textcircled{25}$ és $\textcircled{26}$ tartományok kivételek, amelyek megszámlálható részhalmazra bonthatók, úgy, hogy a részhalmazokra igaz az ütemtervek és jellemzőik azonossága.

A \mathcal{D} -redukált konfigurációkra vonatkozó tényeket a következő tétel foglalja össze.

4.6. Tétel: \mathcal{D} -redukált $Q \in \mathcal{Q}_D$ konfigurációk esetén a /4.5/ egyenlőtlenségek legkisebb $\omega_i^* = /B_i^*, A_i^* / \geq 1, 0 /$ megoldásait, azok Δ_i^* hibáit és a lehetséges KT ütemterveket a 4.2. Táblázat tartalmazza a 4.8. Ábra szerinti halmazoknak megfelelő felbontásban.

A 4.2. Táblázatban jelzett ütemtervek 4.3. Tételbeli

$$\Pi = / \mu_1; \mu_2; U_1; U_2 /$$

jellemzőit a 4.3. Táblázat tartalmazza.

A 4.2. Táblázat Paraméter oszlopában a + jel határozottan pozitív paraméter -értéket jelez. A feltételek $x_i = \mathcal{J}_i - \eta_{3-i}$, $i=1,2$, változók függvényében a 4.8. Ábrán látható halmazokat határozzák meg. A zárójelbe tett feltételek az elfajulás következményei.

A 14,15,25 és 26 sorokban

$$/4.68/ \quad A_i^* = f \geq \left(\frac{x_i}{x_{3-i} - x_i} \right), \quad i=1,2,$$

ahol az $f_{\geq}(x)$ függvény definíciója a 2.1. pontbeli.

A 4.2. Táblázatban R_{i0} , $i=1,2$, az $s/o=s_i$ első döntés melletti összefüggő prioritásos ütemtervet jelzi; a 3. Fejezetbeli 2. Megállapodás figyelembevétel nélkül, ha zárójelben áll. Az ütemterv-típusok oszlopában a + jel egyéb /nem szoros/ ütemtervet jelez és a - jel azt jelzi, hogy a megfelelő $R_{a_1 a_2 a_3}$ típusú KT ütemterv nem létezik. A 14,15,25¹2²3 és 26 sorokban a (+) jel azt jelzi, hogy az R_{iii} és $R_{3-i,i,i}$ típusú ütemterv csak $\Delta_i^* < \eta$ esetén létezik. Ennek megfelelően a 4.3. Táblázatban is zárójelbe tettük az ütemterv jellemzőit. A \rightarrow nyíl azt mutatja, hogy redukció folyamán milyen típusváltozás következhet be az ütemtervben. Ilyenkor a nyíl a 4.5. Tételben használandó jellemzőre mutat. A 4.3. Táblázatban az R_{i0} ütemtervek jellemzőit bekeretezve emeljük ki.

Ssz.	Param.	Feltétel	B_1^*	A_1^*	A_2^*	B_2^*	Δ_1^*	Δ_2^*	R_{111}	R_{122}	R_{121}	R_{212}	R_{211}	R_{222}
1	0000	$(x_1=0, x_2=0)$	1	0	0	1	0	0	-	-	R_{10}	R_{20}	-	-
2	+000	$(x_1=0, x_2<0)$	1	0	0	1	η_1	0	R_{10}	-	-	R_{20}	-	(R_{20})
3	00+0	$(x_1<0, x_2=0)$	1	0	0	1	0	η_2	(R_{10})	-	R_{10}	-	-	R_{20}
4	0+00	$(x_1>0, x_2=0)$	-	-	0	1	-	0	R_{10}	-	-	-	R_{20}	(R_{20})
5	000+	$(x_1=0, x_2>0)$	1	0	-	-	0	-	(R_{10})	R_{10}	-	-	-	R_{20}
6	++00	$(x_1>0, x_2<0)$	-	-	0	1	-	0	R_{10}	-	-	-	R_{20}	(R_{20})
7	00++	$(x_1<0, x_2>0)$	1	0	-	-	0	-	(R_{10})	R_{10}	-	-	-	R_{20}
8	+0+0	$(x_1<0, x_2<0)$	1	0	0	1	η_1	η_2	R_{10}	-	-	-	-	R_{20}
9	0+0+	Ilyen redukált konfiguráció nem lehetséges												
10	+00+	$(x_1=0), x_2<0$	1	0	0	1	η_1	η_2	R_{10}	-	-	R_{20}	-	+
11	0++0	$x_1<0, (x_2=0)$	1	0	0	1	η_1	η_2	+	-	R_{10}	-	-	R_{20}
12	+++0	$x_1<0, (x_2<0)$	1	0	0	1	τ_1	η_2	+	-	R_{10}	-	-	R_{20}
13	+0++	$(x_1<0), x_2<0$	1	0	0	1	η_1	τ_2	R_{10}	-	-	R_{20}	-	+
14	++0+	$(x_1>0), x_2<x_1$	1	1	$A_2^* A_2^*+1$	τ_1	τ_2	τ_1	R_{10}	(+)	+	+	R_{20}	(+)
15	0+++	$x_1<x_2, (x_2>0)$	A_1^*+1	A_1^*	1	1	$\Delta_1^* \tau_2$	τ_2	(+)	R_{10}	+	+	(+)	R_{20}
++++	$-\eta_{3-i} \leq x_i < x_{3-i} + \eta_i, i=1,2$ és ezen kívül													
16	$x_1=0, x_2=0$	1	0	0	1	η	η	-	-	R_{10}	R_{20}	-	-	-
17	$x_1=x_2>0$	1	1	1	1	0	0	R_{10}	-	-	-	-	-	R_{20}
18	$x_1>0, x_2=0$	1	1	0	1	$\eta_1-\eta_2, \eta$	η	R_{10}	-	+	+	R_{20}	-	-
19	$x_1=0, x_2>0$	1	0	1	1	$\eta, \eta_2-\eta_1$	η_1	-	R_{10}	+	+	-	R_{20}	-
20	$x_1<0, x_2=0$	1	0	0	1	τ_1	η	+	-	R_{10}	R_{20}	+	-	-
21	$x_1=0, x_2<0$	1	0	0	1	η	τ_2	-	+	R_{10}	R_{20}	-	+	-
22	$x_1<0, x_2<0$	1	0	0	1	τ_1	τ_2	+	+	R_{10}	R_{20}	+	+	-
23	$x_1<0, x_2>0$	1	0	1	1	$\tau_1, \tau_2-\tau_1$	τ_1	+	R_{10}	+	+	+	R_{20}	+
24	$x_1>0, x_2<0$	1	1	0	1	$\tau_1-\tau_2, \tau_2$	τ_2	R_{10}	+	+	+	R_{20}	+	-
25	$x_1>x_2>0$	1	1	$A_2^* A_2^*+1$	τ_1	$\Delta_2^* \tau_2$	τ_2	R_{10}	(+)	+	+	R_{20}	(+)	-
26	$0 < x_1 < x_2$	A_1^*+1	A_1^*	1	1	$\Delta_1^* \tau_2$	τ_2	(+)	R_{10}	+	+	(+)	R_{20}	-

4.2. Táblázat: Redukált konfigurációk KT ütemtervei

Ssz.	Π_{111}	Π_{122}	Π_{121}	Π_{212}	Π_{211}	Π_{222}	δ
1	-	-	1 1 0 0	1 1 0 0	-	-	-
2	1 0 0 γ_1	-	-	1 1 0 γ_1	-	0 1 0 0 (1)	(1)
3	(1 0 0 0)	-	1 1 γ_2 0	-	-	0 1 γ_2 0 (1)	(1)
4	0 1 0 0	-	-	-	0 1 0 0	0 1 0 0	1
5	(1 0 0 0)	1 0 0 0	-	-	-	1 0 0 0	1
6	0 1 0 0	-	-	-	0 1 0 0	0 1 0 0	1
7	(1 0 0 0)	1 0 0 0	-	-	-	1 0 0 0	1
8	1 0 0 γ_1	-	-	-	-	0 1 γ_2 0	-
9	Ilyen redukált konfiguráció nem létezik						
10	1 0 0 γ_1	-	-	1 1 0 $\gamma_1 - \gamma_2$	-	0 1 γ_2 0	-
11	1 0 0 γ_1	-	1 1 $\gamma_2 - \gamma_1$ 0	-	-	0 1 γ_2 0	-
12	1 0 0 τ_1	-	1 1 $\gamma_2 - \gamma_1$ γ_1	-	-	0 1 γ_2 0	-
13	1 0 0 γ_1	-	-	1 1 $\gamma_2 \gamma_1 - \gamma_2$	-	0 1 τ_2 0	-
14	1 1 0 $\tau_1 - \gamma_2$	$\begin{pmatrix} A_2^* & \Delta_2^* \\ A_{2+1}^* & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1+A_2^* & \gamma_2 - \gamma_1 \\ 2+A_2^* & \gamma_1 - \Delta_2^* \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1+A_2^* & \gamma_2 - \gamma_1 \\ 2+A_2^* & \gamma_1 - \Delta_2^* \end{pmatrix}$	1 1 0 $\tau_1 - \gamma_2$	$\begin{pmatrix} A_2^* & \Delta_2^* \\ A_{2+1}^* & 0 \end{pmatrix}$	-
15	$\begin{pmatrix} A_1^{*+1} & 0 \\ A_1^* & \Delta_1^* \end{pmatrix}$	1 1 $\tau_2 - \gamma_1$ 0	$\begin{pmatrix} A_1^{*+2} & \gamma_2 - \Delta_1^* \\ A_1^{*+1} & \gamma_1 - \gamma_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_1^{*+2} & \gamma_2 - \Delta_1^* \\ A_1^{*+1} & \gamma_1 - \gamma_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_1^{*+1} & 0 \\ A_1^* & \Delta_1^* \end{pmatrix}$	1 1 $\tau_2 - \gamma_1$ 0	-
16	-	-	1 1 0 0	1 1 0 0	-	-	-
17	1 1 0 0	-	-	-	-	1 1 0 0	-
18	1 1 0 $\gamma_1 - \gamma_2$	-	1 2 $\gamma_1 - \Delta_1^*$ 0	1 2 $\gamma_1 - \Delta_1^*$ 0	1 1 0 $\gamma_1 - \gamma_2$	-	-
19	-	1 1 $\gamma_2 - \gamma_1$ 0	2 1 0 $\gamma_1 - \Delta_2^*$	2 1 0 $\gamma_1 - \Delta_2^*$	-	1 1 $\gamma_2 - \gamma_1$ 0	-
20	1 0 0 τ_1	-	1 1 $\gamma_2 - \gamma_1$ 0	1 1 $\gamma_2 - \gamma_1$ 0	1 0 0 τ_1	-	-
21	-	0 1 τ_2 0	1 1 0 $\gamma_1 - \gamma_2$	1 1 0 $\gamma_1 - \gamma_2$	-	0 1 τ_2 0	-
22	1 0 0 τ_1	0 1 τ_2 0	1 1 $\gamma_2 - \gamma_1$ γ_1	1 1 $\gamma_2 - \gamma_1$ γ_1	1 0 0 τ_1	0 1 τ_2 0	-
23	1 0 0 τ_1	1 1 $\tau_2 - \tau_1$ 0	2 1 $\gamma_2 - \gamma_1$ $\gamma_1 - \Delta_2^*$	2 1 $\gamma_2 - \gamma_1$ $\gamma_1 - \Delta_2^*$	1 0 0 τ_1	1 1 $\tau_2 - \tau_1$ 0	-
24	1 1 0 $\tau_1 - \tau_2$	0 1 τ_2 0	1 2 $\gamma_1 - \gamma_2$ $\gamma_1 - \Delta_2^*$	1 2 $\gamma_1 - \gamma_2$ $\gamma_1 - \Delta_2^*$	1 1 0 $\tau_1 - \tau_2$	0 1 τ_2 0	-
25	1 1 0 $\tau_1 - \tau_2$	$\begin{pmatrix} A_2^* & \Delta_2^* \\ A_{2+1}^* & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1+A_2^* & \gamma_2 - \Delta_1^* \\ 2+A_2^* & \gamma_1 - \Delta_2^* \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1+A_2^* & \gamma_2 - \Delta_1^* \\ 2+A_2^* & \gamma_1 - \Delta_2^* \end{pmatrix}$	1 1 0 $\tau_1 - \tau_2$	$\begin{pmatrix} A_2^* & \Delta_2^* \\ A_{2+1}^* & 0 \end{pmatrix}$	-
26	$\begin{pmatrix} A_1^{*+1} & 0 \\ A_1^* & \Delta_1^* \end{pmatrix}$	1 1 $\tau_2 - \tau_1$ 0	$\begin{pmatrix} A_1^{*+2} & \gamma_2 - \Delta_1^* \\ A_1^{*+1} & \gamma_1 - \Delta_2^* \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_1^{*+2} & \gamma_2 - \Delta_1^* \\ A_1^{*+1} & \gamma_1 - \Delta_2^* \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_1^{*+1} & 0 \\ A_1^* & \Delta_1^* \end{pmatrix}$	1 1 $\tau_2 - \tau_1$ 0	-

4.3. Táblázat: A 4.2. Táblázat ütemterveinek jellemzői.

Bizonyítás: A bizonyítás lényegében a két táblázat adatainak ellenőrzését jelenti. Először a 4.2. Táblázatnak a /4.5/ egyenlőtlenség megoldásaira vonatkozó adatait ellenőrizzük. Utána a KT ütemtervek típusaira vonatkozó adatokat, végül a 4.3. Táblázat \square jellemzőinek adatait ellenőrizzük. Igyekszünk, ahol lehet, általánosítani és egyszerre több eset állítását /több sort/ bizonyítani. Ezeket megjegyzés formájában kiemeljük.

/i/ Az ω_i^* és Δ_i^* adatok ellenőrzése: Az $\omega_i^* = /1,0/$ és $\omega_i^* = /1,1/$ megoldások helyettesítéssel ellenőrizhetők. $\omega_i^* = /1,0/$ biztosan minimális $\omega_i \geq /1,0/$ megoldása a /4.5/ egyenlőtlenségnek, az $\omega_i^* = /1,1/$ pedig akkor minimális, ha $\omega_i = /1,0/$ nem megoldás.

1. Megjegyzés: A /4.5/ egyenlőtlenségnek az $\omega_i = /1,0/$ akkor és csak akkor nem megoldása, ha $x_i > 0$. Egyáltalán nincs $\omega_i \geq /1,0/$ megoldás, ha emellett $\tau_{3-i} = 0$, és $\omega_i \geq /1,0/$ feltételből $\omega_i > /1,0/$ következik, ha $\tau_{3-i} > 0$.

Ugyanis $x_i > 0$ ekvivalens $\eta_i > \eta_{3-i} \geq 0$ feltétellel, ezért $\omega_i = /1,0/$ esetén

$\Delta_i = \tau_i > \eta_i + \eta_{3-i} = \eta$, vagyis ω_i nem megoldás.

$x_i \leq 0$ esetén viszont $\eta_i \leq \eta_{3-i}$, ezért $\Delta_i \leq \eta$.

$x_i > 0$ esetén $\eta_i > 0$ és $\tau_{3-i} = 0$ esetén teljesül a /4.4/ feltétel, amely azt jelenti, hogy /4.5/-nek nincs $\omega_i \geq /1,0/$ megoldása.

Ezzel igazoltuk $\omega_i^* = /1,0/$ megoldásokat a 4.2. Táblázat soraiban. Azt is igazoltuk, hogy a 14,15, 17-19 és 23-26 sorokban $\omega_i^* > /1,0/$ megoldásoknak kell fellépniük.

A 17 sor $\omega_i^* = /1,1/$, $i=1,2$, adatai triviálisan ellenőrizhetők. A többi sor adatait igazolja a következő általánosabb állítás.

2. Megjegyzés: A - /4.5/ egyenlőtlenségek legkisebb

$\omega_i^* \geq /1,0/$ megoldásaira és azok Δ_i^* hibáira

/4.69/ $\omega_i^* = /A_i^*+1, A_i^*/$, $\omega_{3-i}^* = /1,1/$, $\eta_i < \Delta_i^* \leq \eta$, $0 < \Delta_{3-i}^* < \eta_{3-i}$

akkor, ha a

/4.69'/ $\tau_i > 0$, $x_{3-i} > 0$, $x_i < x_{3-i}$

feltétel teljesül, ahol $i=1,2$ és A_i^* értéke a /4.68/ szerinti.

(Bizonyítás:) A szimmetria miatt elegendő $i=1$ esetben bizonyítani. Tegyük fel tehát, hogy $i=1$ és

$$\tau_1 > 0, \quad \vartheta_2 - \eta_1 > 0, \quad \vartheta_1 - \eta_2 < \vartheta_2 - \eta_1.$$

A redukáltság miatt $\vartheta_2 < \tau_1$. Ezekből $\tau_2 > \eta$ és $\tau_1 < \tau_2$ azonnal következik, sőt

$$\tau_2 - \tau_1 = \eta_2 - (\tau_1 - \vartheta_2) < \eta_2$$

is adódik. A továbbiakban a

$$\tau_1 > 0, \quad \tau_2 > \eta, \quad 0 < \tau_2 - \tau_1 < \eta_2$$

feltételeket fogjuk kihasználni. $\tau_2 > \eta$ miatt

$\omega_2 = /1,0/$ nem megoldás, $0 < \tau_2 - \tau_1 < \eta_2$ miatt

$\omega_2 = /1,1/$ viszont az. Így $\omega_2^* = /1,1/$ bizonyítva van. $0 < \Delta_2 = \tau_2 - \tau_1 < \eta_2$ következik.

$\tau_1 < \tau_2$ miatt $\omega_1 = /B_1, A_1/$ megoldásnál $B_1 \leq A_1$ nem lehet, mert arra $\Delta_1 < 0$ következne. Vagyis biztosan $B_1^* > A_1^*$.

Legyen $\omega_1' = /A_1' + 1, A_1'/$ a /4.5/ minimális $\omega_1 \geq /1, 0/$ megoldása a $B_1 = A_1 + 1$ járulékos feltétel mellett. Vagyis legyen A_1' a minimális $A_1 \geq 0$, amelyre $\Delta_1 = (A_1 + 1)\tau_1 - A_1\tau_2 = \tau_1 - A_1(\tau_2 - \tau_1)$ hiba kielégíti a $0 \leq \Delta_1 \leq \eta$ feltételt. Ilyen A_1' biztosan van. Ha ugyanis $\tau_1 \leq \eta$, akkor $A_1' = 0$. Ha $\tau_1 > \eta$, akkor $\tau_2 - \tau_1 > 0$ miatt $(\tau_1 - \eta) / (\tau_2 - \tau_1) > 0$ és $\tau_2 - \tau_1 < \eta_2 \leq \eta$ miatt $\eta / (\tau_2 - \tau_1) > 1$.

Ezért biztosan van $A_1' > 0$ egész, amelyre

$$\frac{\tau_1 - \eta}{\tau_2 - \tau_1} \leq A_1' \leq \frac{\tau_1 - \eta}{\tau_2 - \tau_1} + \frac{\eta}{\tau_2 - \tau_1},$$

amely egyenlőtlenség ekvivalens a $0 \leq \Delta_1 \leq \eta$ egyenlőtlenséggel. A legkisebb megoldás ekkor nyilván

$$A_1' = f \geq \left(\frac{\tau_1 - \eta}{\tau_2 - \tau_1} \right) = f \geq \left(\frac{\vartheta_1 - \eta_2}{\vartheta_2 - \eta_1 - / \vartheta_1 - \eta_2 /} \right) = f \geq \left(\frac{x_1}{x_2 - x_1} \right).$$

$\tau_1 \leq \eta$ esetén azonban $\tau_1 - \eta = \vartheta_1 - \eta_2 \leq 0$ miatt $\tau_2 - \tau_1 = \vartheta_2 - \eta_1 - / \vartheta_1 - \eta_2 / > - / \vartheta_1 - \eta_2 / \geq 0$, ezért $-1 < (\tau_1 - \eta) / (\tau_2 - \tau_1) \leq 0$ és így $f \geq \left(\frac{\tau_1 - \eta}{\tau_2 - \tau_1} \right) = 0 = A_1'$

szintén teljesül. Vagyis ω_1' éppen a /4.69/ állításban szereplő ω_1^* megoldás. Be kell még látni, hogy $B_1^* > A_1^* + 1$ lehetetlen, mert akkor $\omega_1^* = \omega_1'$ valóban igaz lesz.

Tegyük fel azonban, hogy $B_1^* \geq A_1^* + 2$ lenne. Ekkor a $0 \leq \Delta_1^* \leq \eta$ feltétellel ellentmondásra jutnánk. Ugyanis $\Delta_1^* = B_1^* \tau_1 - A_1^* \tau_2 \geq 2\tau_1 - A_1^* (\tau_2 - \tau_1) = \tau_1 - (A_1^* - A_1')(\tau_2 - \tau_1) + \tau_1 - A_1'(\tau_2 - \tau_1) = \tau_1 - (A_1^* - A_1')(\tau_2 - \tau_1) + \Delta_1'$,

ahol A_1' a fentebb definiált ≥ 0 egész, amelyre az $\omega_1' = \lfloor A_1' + 1, A_1' \rfloor$ hibája $0 \leq \Delta_1' \leq \eta$.

$\tau_1 \leq \eta$ esetén $A_1' = 0$ és $\Delta_1' = \tau_1$ volt ezért $0 \leq \Delta_1^* \leq \eta$ csak $A_1^* > 0$ és $B_1^* > 1$ esetén teljesülhetne és ω_1^* nem lenne minimális $\geq \lfloor 1, 0 \rfloor$ megoldás. $\tau_1 > \eta$ esetén viszont $0 \leq \Delta_i^* \leq \eta$ csak ugy teljesülhet, ha $A_1^* - A_1' > 0$ és $B_1^* \geq A_1^* + 2 > A_1' + 1$. Vagyis ismét $\omega_1^* > \omega_1' \geq \lfloor 1, 0 \rfloor$ lenne, ami ellentmondás.

Az $\eta_1 < \Delta_1^* \leq \eta$ következik a $0 \leq f_{\geq}(x) - x < 1$ és a $\tau_2 - \tau_1 < \eta_2$ relációkból ugyanis $\Delta_1^* \leq \eta$ igaz és

$$\Delta_1^* = \tau_1 - A_1^* (\tau_2 - \tau_1) = \frac{\tau_1 - \eta}{\tau_2 - \tau_1} (\tau_2 - \tau_1) - f_{\geq} \left(\frac{\tau_1 - \eta}{\tau_2 - \tau_1} \right) (\tau_2 - \tau_1) + \eta > \eta - (\tau_2 - \tau_1) > \eta_1 \quad \text{adódik.}$$

Ezzel a 2. Megjegyzésünket bizonyítottuk.

E Megjegyzés igazolja a 4.2. Táblázat 14, 15, 18, 19 és 23-26 soraiban álló ω_i^* és Δ_i^* értékeket.

/ii/ Az $R_{a_1 a_2 a_3}$ típusok ellenőrzése: Az $s^{(a_1)} - s^{(a_2)} - s^{(a_3)}$ jellegzetes döntéssorozat lehetőségét a Δ_1^* és Δ_2^* értékek ismeretében a 4.3. Lemma alapján a 4.3. Ábrán lévő ciklikus gráf segítségével ellenőrizhetjük legegyszerűbben.

Az R_{i0} összefüggő prioritásos ütemterv mindig a $a_1=i$ melletti szoros $R_{a_1 a_2 a_3}$ típusú ütemterv. A 3. Fejezet 2. Megállapodása miatt ez nem mindig megengedhető ütemterv, ilyenkor a 4.2. Táblázatban zárójelben szerepel és szerepel mellette egy másik R_{i0} kváziszoros és kvázikövetkezetes ütemterv, amely eleget tesz a 2. Megállapodásnak.

Ha azonban az elfajult konfiguráció KT ütemtervének jellemzőit a 4.6. Tételben nem redukált konfiguráció ütemtervének meghatározására kívánjuk használni, amelynél a 2. Megállapodásnak biztosan nincs szerepe, akkor a redukált esetben sem szabad a 2. Megállapodást figyelembe venni. Ez az oka az (R_{i0}) ütemtervek szerepeltetésének a 2-7 sorokban lévő degenerált konfigurációknál. Ez a szempont a $Q=0$ nulla-konfigurációnál nem befolyásol, mert $Q=0$ esetre egyetlen $Q \neq 0$ konfiguráció sem redukálódhat.

A $Q=\eta_1; 0; \eta_2; 0$ elfajult esetekben a 2,3 és 8 sorokban a redukció folyamán $R_{a_1 a_2 a_3}$ ütemterv-típus változhat az S stratégia változása nélkül. Az $R_{i,3-i,i}$ típus R_{iii} típusra változhat $\vartheta_i=0$ bekövetkezésekor, amikor $\eta_{3-i} > 0$ mellett a β_{3-i} -szituáció megszűnik. Ezt jelzik az $R_{i,3-i,i} \rightarrow R_{iii}$ nyilak. Ezt a tényt egyébként a 4.8. Lemmabeli /4.42/ konfigurációk ütemtervei alapján is beláthatjuk.

A 4-7 sorok a 4.8. Lemmabeli /4.43/ és /4.43'/ konfigurációk redukciójának lehetnek az eredményei és annak alapján is beláthatók a szereplő R_{i0} ütemtervek típusai. A 10-13 és 16-24 sorokban a szereplő típusok Δ_i^* értékek alapján a 4.3. Ábra segítségével ellenőrizhetők.

A 14,15,25 és 26 sorokban a típusok a 2. Megjegyzésünk-
ből következnek. $\Delta_i^* = \eta$ esetén $\delta_i^* = \beta_{3-i}$ ezért az
 $s^{(i)}$ jellegzetes döntést mindig $s^{(3-i)}$ követi, így az
 R_{iii} és $R_{3-i,i,i}$ típusok ki vannak zárva. Ezt jel-
zik a (+) jelzések e négy sorban.

/iii/ A $\prod_{a_1 a_2 a_3}$ jellemzők ellenőrzése:

A 4.2. Táblázatban feltüntetett $R_{a_1 a_2 a_3}$ ütemterv tipu-
sok $\prod_{a_1 a_2 a_3}$ jellemzőit az ω_i^* megoldások alap-
ján a 4.3. Tétel szerint kaphatjuk. A 4.3. Táblázat nem
egyéb, mint ezek megadása beleértve a 2. Megállapodást nem
kielégítő zárójelben álló jellemzőket is a 2-7 sorokban.
Az utolsó oszlopban álló δ "korrekciós tényező" a
4-7 sorokban a 4.3. Tétel /iv/ állításában szereplő /4.10/
képlet szerinti értékek, amelyeket 2-3 sorokban a zárójel-
ben álló ütemterveknél is alkalmazhatjuk és akkor ugyanazt
a p és γ periodushosszat és hatékonyságot nyerjük, mint-
ha a 2. Megállapodást figyelembe véve ütemeznénk. Ezt jel-
zik a δ oszlopbeli (1) értékek. A 14,15,25 és 26 sorok-
ban a zárójelbe tett jellemzők a 4.2. Táblázat (+) jeleire
utalnak, amelyek csak $\Delta_i < \eta$ melletti ütemterv létezését
jelzik.

Ezzel tételünket teljesen bebizonyítottuk.

Q.e.d.

E 4.6. Tétel táblázataiból különféle törvényszerűsége-
ket olvashatunk ki \mathcal{D} -redukált konfigurációk jellemzőire.
Ilyeneket már az 1. és 2. Megjegyzésekben kiemeltünk. Azo-
kat célszerű egy lemmába foglalni és ábrán szemléltetni.

4.9. Lemma: \mathcal{D} -redukált $Q \in Q_0$ konfiguráció esetén a /4.5/ egyenlőtlenség legkisebb $\omega_i^* \geq /1,0/$ megoldásait, azok Δ_i^* hibáit az alábbi 4.4. Táblázat foglalja össze a 4.2. Táblázat soraira való utalással együtt, és a 4.9. Ábra szemlélteti. Az A_i^* értéket a /4.68/ formula szolgáltatja. A 4.9. Ábrán a tartományokat a (B_1^*, A_1^*) érték-négyessel (A_2^*, B_2^*) jelöltük, amelyek az ω_1^* és ω_2^* legkisebb megoldásoknak felelnek meg $\eta_1 > 0$ és $\eta_2 > 0$ esetén.

ω_i^*	Δ_i^*	Határok	Folyt.
/1,0/	τ_i	$\eta_i \leq \Delta_i^* \leq \eta$	1
-	-	-	2
/1,1/	$\tau_i - \tau_{3-i}$	$0 < \Delta_i^* < \eta_i$	3
$/A_{i+1}^*, A_i^*/$	$\eta - \left\{ \frac{\eta_{3-i} - \eta_i}{\tau_{3-i} - \tau_i} \right\} (\tau_{3-i} - \tau_i)$	$\eta_i < \Delta_i^* \leq \eta$	4

Folyt.	Feltétel	4.2. Táblázatban	
		i=1	i=2
1	$\eta_i - \eta_{3-i} \leq 0$	1-3, 5, 7, 8, 10-13 16, 19-23	1-4, 6, 8, 10-13 16, 18, 20-22, 24
2	$\eta_i > 0, \tau_{3-i} = 0$	4, 6	5, 7
3	$\tau_{3-i} > 0, \eta_i - \eta_{3-i} > 0, \eta_{3-i} - \eta_i \leq \eta_i - \eta_{3-i}$	14 17, 18, 24, 25	15 17, 19, 23, 26
4	$\tau_i > 0, \eta_{3-i} - \eta_i > 0, \eta_i - \eta_{3-i} < \eta_{3-i} - \eta_i$	15 26	14 25

4.4. Táblázat: A /4.5/ egyenlőtlenség legkisebb $\omega_i \geq /1,0/$ megoldásai \mathcal{D} -redukált konfigurációkra.

Megjegyzés: A 4.9. Ábra $/-\eta_2, -\eta_1/$ pontja a $/-\eta_2, 0/$, $/0, -\eta_1/$, illetve $/0, 0/$ pontra változik, ha $\eta_1=0$, $\eta_2=0$, illetve $\eta_1=\eta_2=0$.
 $\eta_1=0$ esetén az $x_1=-\eta_2$, $x_2>0$ félegyenesen az $\begin{pmatrix} 1, 0 \\ - \end{pmatrix}$ és $\eta_2=0$ esetén az $x_2=-\eta_1$, $x_1>0$ félegyenesen a $\begin{pmatrix} - \\ 0, 1 \end{pmatrix}$ kótázás fejezné ki az ω_1^* , ω_2^* megoldaspár értékét.

Bizonyítás: A 4.4. Táblázatban jelzett törvényszerűségeket egyszerű ellenőrizni a 4.2. Táblázatban a felüntetett sorszámok alapján. A 4.9. Ábra $\eta_1>0$, $\eta_2>0$ esetén szemlélteti a táblázat összefüggéseit. Az A_i^* értékek tartományait a /4.68/ formula igazolja, ha észrevesszük, hogy A_i^* konstans értékeinek tartományait az $\frac{x_i}{x_{3-i}-x_i} = \text{egész}$

egyenesek határolják, amelyek egy sugársort képeznek. Az x_i és $x_{3-i}-x_i$ értékeket az ábrán sraffozott derékszögű háromszögek segítségével emeltük ki; befogói az értékek.

Q.e.d.

A 4.6. Tétel 4.3. Táblázatából az R_{ao} összefüggő prioritásos ütemtervek jellemzőire vonatkozóan is kiolvashatjuk a törvényszerűségeket. Ez egy Tételbe foglaljuk.

4.7. Tétel: /A/ \mathcal{D} -redukált $Q \in Q_{\mathcal{D}}$ konfigurációk R_{io} , $i=1,2$, összefüggő prioritásos ütemterveinek típusát és a 4.4. Tételbeli $\Pi=(\mu_1; \mu_2; \varepsilon_1; \varepsilon_2/$ jellemzőit a 4.5. Táblázat tartalmazza a paraméterek-

re és a 4.2. Táblázatbeli sorszámokra utalással. A /4.4/ esetekben a $\delta=1$ korrekciós tag alkalmazandó a p periodushossz /4.6'/ és az a P_A -fogalomság /4.7'/ szerinti számításához, ha a 3. Fejezetbeli 2. Megállapodást figyelembe vesszük. A 4.2. Táblázat minden esete /kivéve a lehetetlen 9 esetet/ egyszer szerepel $i=1$ és egyszer $i=2$ mellett, ahol $s/o=s_i$ az R_{10} első döntése. A 2 és 3 esetek ezenkívül zárójelben is szerepelnek. Ezt kell i értéknél figyelembe venni, ha a jellemzőket a 4.6. Tételben nem-redukált konfiguráció ütemtervének meghatározásához használjuk fel.

/B/ Az R_{10} ütemtervek típusait, jellemzőinek tartományait és az $U_j = \varepsilon_j \eta_{3-j}$ jellemzők értékeit a 4.11. Ábrán szemléltetjük $i=1$ és 2 mellett az $/x_1, x_2/$ koordinátarendszerben. A 4.8/(a)- (c) Ábrák tartományait a 4.10. Ábra szerint egyetlen $/x_1, x_2/$ síkban ábrázoljuk oly módon, hogy az $x_j \geq 0$, $x_{3-j} = -\eta_j$ / $j=1,2$ / egyenes mentén feltüntetjük az $\eta_{3-j}=0$ melletti speciális paraméterértékeket, amelyek $\eta_{3-j} > 0$ esetén nem érvényesek /ilyenkor ugyanis a pont nem redukált konfigurációt ábrázol/.

/C/ $R_{10} \approx R_{20}$ minden nem elfajult konfiguráció esetén teljesül és kizárólag a

$$\eta_1 \eta_2 = 0, \quad x_1 \leq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_1 + x_2 < 0$$

mellett nem teljesül.

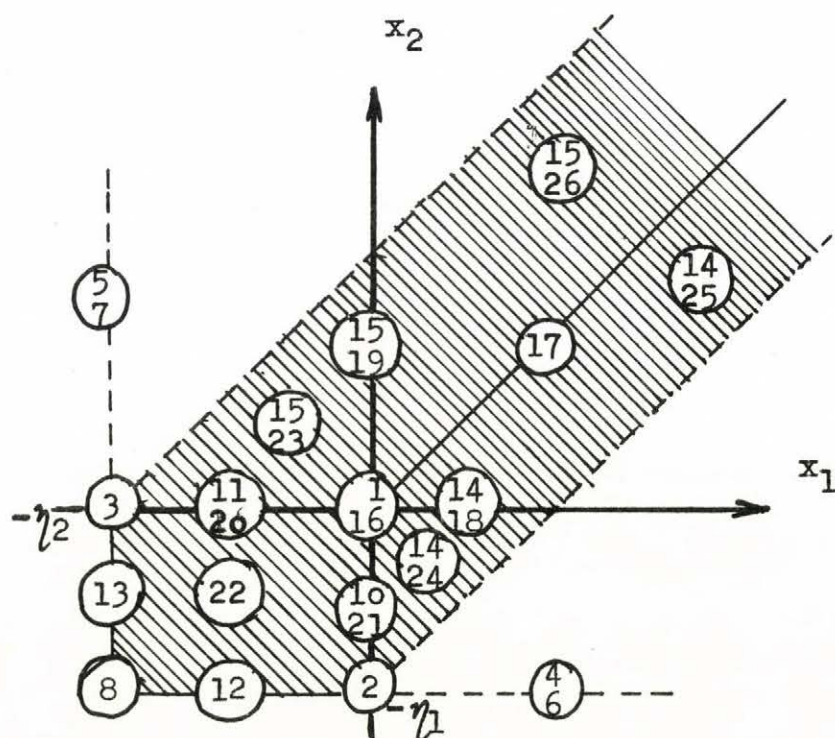
μ_1	μ_2	ε_1	ε_2	Feltétel	Folyt.
0	1	0	0	$\vartheta_1 > 0, \tau_2 = 0 (x_1 > 0, x_2 \leq 0)$	1
0	1	1	0	$\vartheta_2 = 0, \eta_2 > 0 (x_1 < 0, x_2 \leq 0)$	2
1	0	0	0	$\vartheta_2 > 0, \tau_1 = 0 (x_1 \leq 0, x_2 > 0)$	3
1	0	0	1	$\vartheta_1 = 0, \eta_1 > 0 (x_1 \leq 0, x_2 < 0)$	4
1	1	0	$\frac{x_1 - x_2}{\eta_1}$	$\vartheta_1 > 0, \tau_2 \neq 0) x_1 > 0, x_2 \leq x_1$	5
1	1	$\frac{x_2 - x_1}{\eta_2}$	0	$\vartheta_2 > 0, \tau_1 \neq 0) x_2 > 0, x_1 \leq x_2$	6
1	1	$\frac{-x_1}{\eta_2}$	$\frac{-x_2}{\eta_1}$	$\vartheta_i > 0 \vee \tau_i = 0, x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$	7

Folyt.	Sorszám a 4.3. Táblázatban		$R_{ia_1a_2}$ típus
	i=1	i=2	
1	4,6	4,6	R_{i11}
2	-	(2),3,8,11,12	R_{222}
3	5,7	5,7	R_{i22}
4	(3),2,8,10,13	-	R_{111}
5	14,17,18,24,25	14,18,24,25	R_{i11}
6	15,19,23,26	15,17,19,23,26	R_{i22}
7	1,3,11,12,16,20-22	1,2,10,13,16,20-22	$R_{i,3-i,i}$

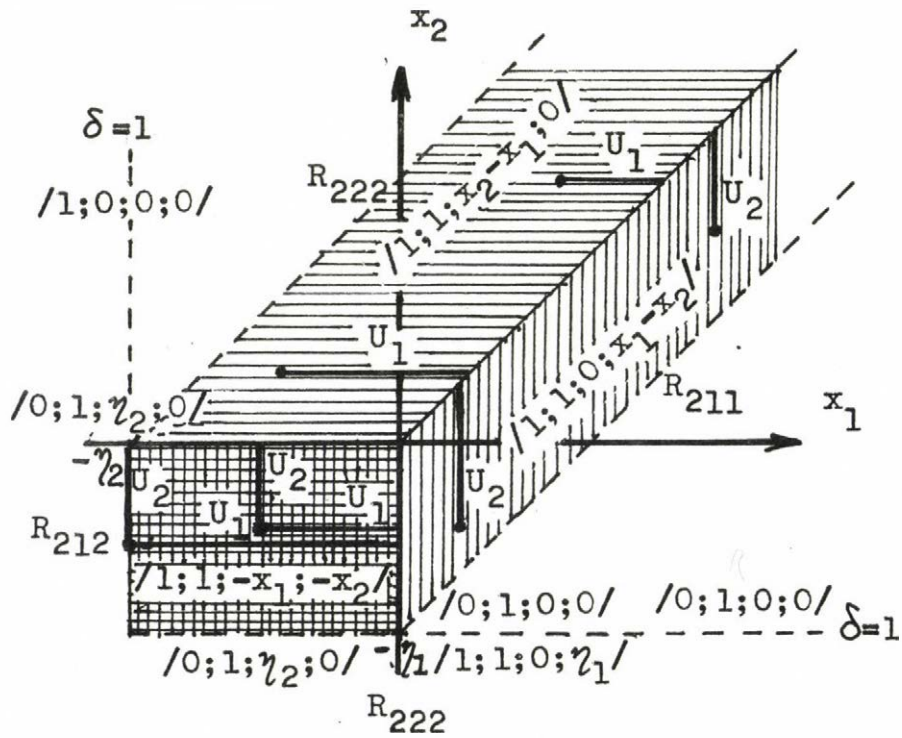
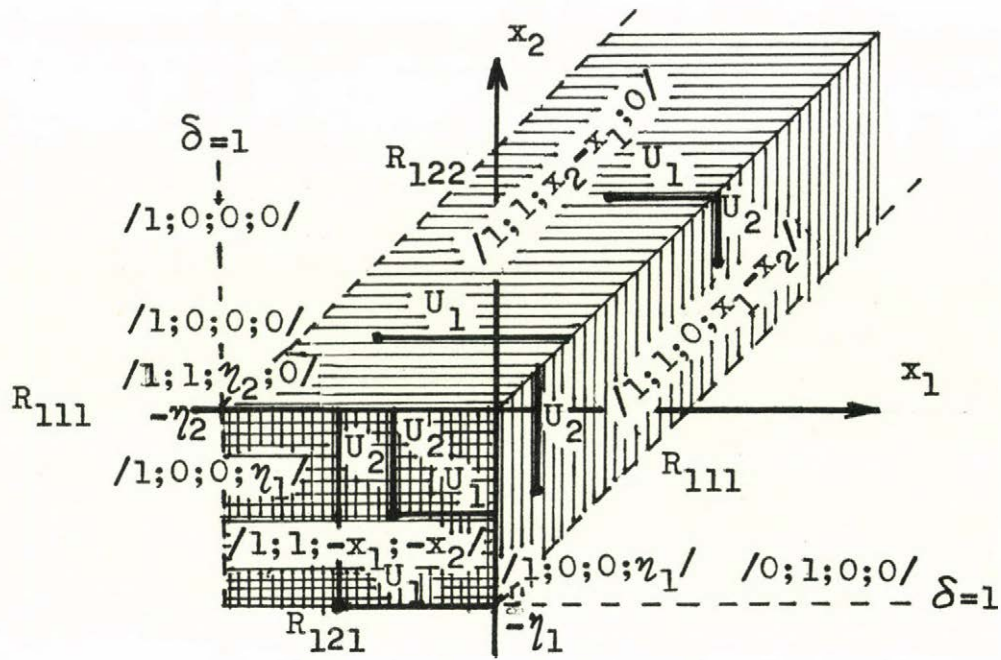
4.5. Táblázat: \mathcal{D} -redukált konfigurációk R_{i0} , $i=1,2$, ütemterveinek jellemzői.

Bizonyítás: A tétel bizonyítása egyszerűen a táblázat és az ábrák adatainak ellenőrzéséből áll. A 4.5. Táblázat \square jellemzői és a 4.3. Táblázatra utaló sorszámok összetartozása könnyen ellenőrizhető. A 4.5. Táblázatbeli feltételek szükségessége is a 4.2. és 4.3. Táblázatok alapján látható be. Ezeket a feltételeket a 4.11. Ábrák tartományaival azonosítva ellenőrizhetők leg egyszerűbben a határesetek és elfajult esetek és ezen keresztül a 4.5. Táblázatbeli feltételek elégsége. A /C/ állítás a 4.3. Táblázatból kiolvasható.

Q.e.d.



4.10. Ábra: A \mathcal{D} -redukált konfigurációk tartományai.



4.11. Ábra: \mathcal{D} -redukált konfigurációk R_{i0} ütemterveinek jellemzői.

4.4. Összefüggő ütemtervek értékelése.

A 4.2. és 4.3. pontok eredményei lehetővé teszik bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció összes következetes természetes ütemtervének az értékelését és hatékonyságuk összehasonlítását. Ez egy lehetőség az összefüggő-optimalis ütemterv kiválasztására. Ennek menetét a 4.12. Ábrán egy folyamat-diagrammal /KT-Diagram/ szemléltetjük. Ez egyben egy ésszerű algoritmust definiál az összefüggő-optimalis ütemterv kiválasztására eddigi ismereteink alapján. Az algoritmus két alternatív utat jelöl ki általános esetre, amelyek között a választás önkényes. Az egyik út a /4.5/ egyenlőtlenségek, vagyis két KIF /koincidencia feladat/ megoldását igényli. A 2. Fejezet eredményei alapján tudjuk, hogy a szóbanforgó KIF megoldása a $\xi_i = \tau_i / \tau_{3-i}$ hányadoshoz közelítő Ω_0^+ megoldások halmaza alkalmas elemének kiválasztását és előállítását jelenti egy euklideszi algoritmus végrehajtása útján.

Kizárva a KT-Diagram szerint az

$$/4.70/ \quad \tau_1 \tau_2 \eta^2 = 0$$

elfajulás esetét, $0 < \tau_i / \tau_{3-i} < \infty$ és $0 < \eta / \tau_{3-i} < \infty$ lesz, ezért a /4.5/ alatti KIF-eknek mindig létezik megoldása, amely véges lépésben meghatározható a 2. Fejezet eredményeire alapozva. A /4.5/ alatti egyenlőtlenségek $i=1$ és 2 mellett egy bal-, illetve jobboldali KIF, ha $\xi_0 = \tau_1 / \tau_2$ hányadosra nézve tekintjük. Szimmetria okokból azonban a két KIF nem igényel két független megoldási algoritmust, hanem egyetlen euklideszi algoritmusra alapozható.

Ezt fogjuk megtenni alább a Δ -Algoritmusban.

A másik út a KT ütemtervek értékelésére a \mathcal{D} -redukción alapszik. Ez az alternatíva a 4.3. pont eredményeit használja fel. Ennek műveletigényes része maga a \mathcal{D} -redukció és a \underline{D} mátrix meghatározása, mely mátrixot a 4.5. Tétel utáni 5. Megjegyzésben definiálunk. A \mathcal{D} -redukció az euklideszi algoritmus általánosításának tekinthető. A KT-Diagramon feltüntetett

Δ -Algoritmus és \mathcal{D} -Algoritmus, mint a KT ütemtervek értékelésének két alternatívája ezenkívül is szoros kapcsolatot mutat. E kapcsolat részletesen elemezhető lenne és kimutatható lenne, hogy a két algoritmus sok vonatkozásban ekvivalens. Ez az alapja annak, hogy a \mathcal{D} -redukciós módszer általában használható koincidencia feladatok megoldására. A \mathcal{D} -redukciós módszer ilyen értelmű további vizsgálatát mi nem végezzük el, csupán utalunk arra, hogy az R_{10} összefüggő prioritásos ütemterv $\Pi = / \mu_1; \mu_2; \varepsilon_1; \varepsilon_2 /$ jellemzőinek meghatározására ekvivalens a legkisebb $\mu_1, \mu_2 > 0$, relatív prim egészek és $0 \leq \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1$ valóságok meghatározásával, amelyekre

$$p_{10} = \mu_1 \tau_1 + \varepsilon_1 \eta_2 = \mu_2 \tau_2 + \varepsilon_2 \eta_1$$

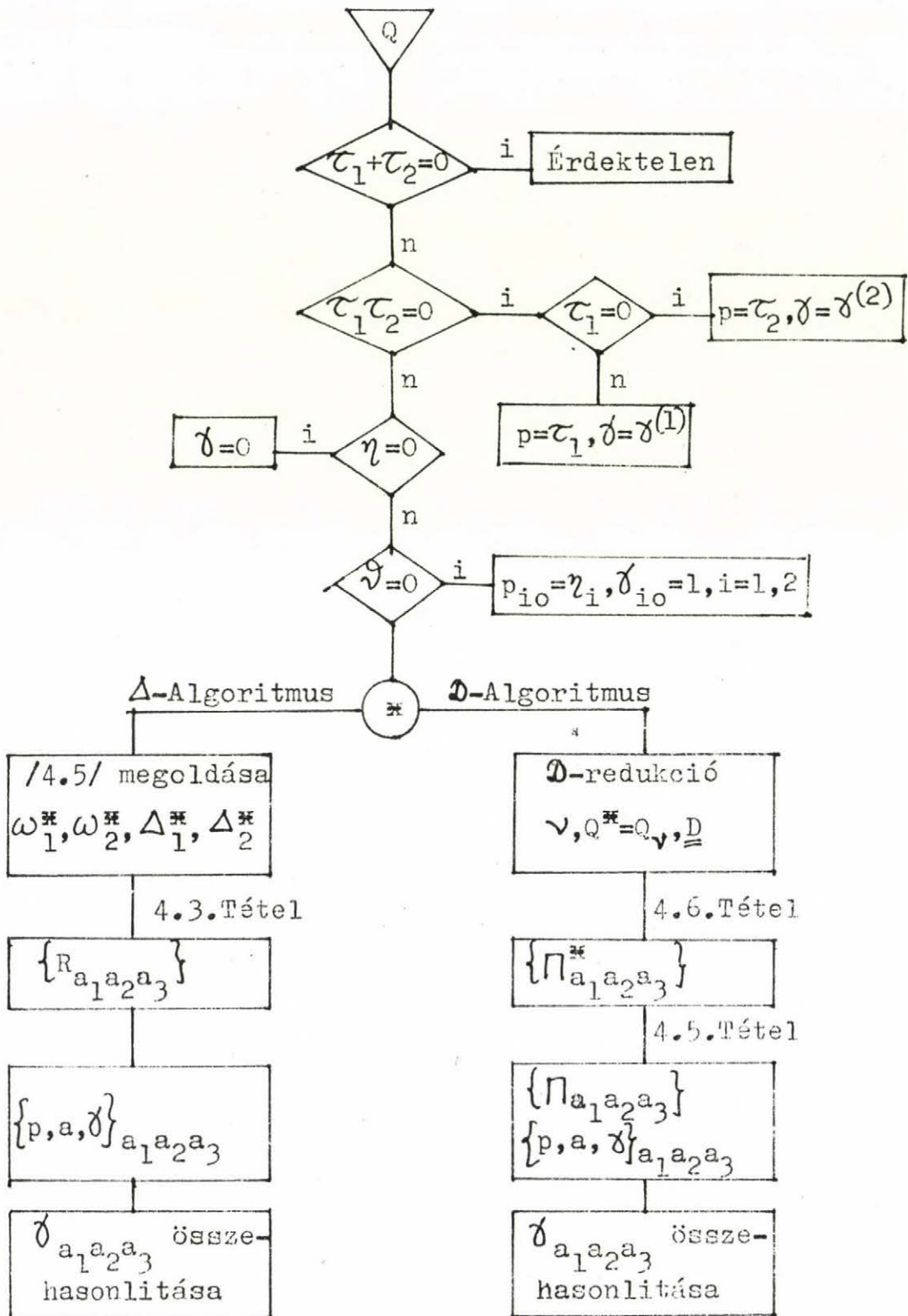
egyenlőség teljesül. Ez azonban ekvivalens a legkisebb $\mu_1, \mu_2 > 0$, relatív prim megoldásával az aszimmetrikus

$$-\eta_2 \leq \mu_1 \tau_1 - \mu_2 \tau_2 \leq \eta_1$$

koincidencia feladatnak.

A \mathcal{D} -redukció végrehajtására a \mathcal{D} -Algoritmust adjuk meg.

A \mathcal{D} -Algoritmus és a \mathcal{D} -redukciós módszer a KT ütemtervek értékelésére a Δ -Algoritmus alternatívával szemben rendelkezik néhány előnnyel. A KIF-ek megoldására történő általánosíthatóságon kívül kiemelhetjük azt, hogy a redukált konfiguráció jellege és ütemterve szemléletesebb betekintést enged a konfiguráció paramétereire és az ütemtervek sajátosságai közötti kapcsolatokba, mint a /4.5/ egyenlőtlenségek megoldása. A \mathcal{D} -Algoritmus egyszerűbb a Δ -Algoritmusnál, mert - majd látjuk - kevesebb reláció ellenőrzését igényli. A \mathcal{D} -Algoritmus műveletigénye egyszerűbben vizsgálható. Többek között egyszerű becsléseket fogunk tudni megadni a \mathcal{D} -Algoritmus számításigényére.



4.9. Ábra: Folyamat-diagram a KT ütemtervek értékelésére /KT-Diagram/

Először azonban foglalkozzunk az R_{10} összefüggő prioritásos ütemtervek hatékonyságának vizsgálatával.

Eddigi eredményeink nem szolgáltatnak egyszerű általános kritériumokat az összefüggő-optimalis ütemterv kiválasztására. Egy "euklideszi jellegű" algoritmus nélkül általában nem tudjuk egy konfigurációnál eldönteni, hogy melyik az optimalis /maximalis γ_R hatékonyságú/ KT ütemterv. A \mathcal{D} -redukció után a \mathcal{D} -redukált Q_v konfiguráció ismeretében azonban ez a kérdés már eldönthető. A \mathcal{D} -redukció generálta mennyiségek segítségével sem ismerünk azonban általános kritériumot az optimalis KT ütemterv kiválasztására. Az R_{10} összefüggő prioritásos ütemtervek nem mások, mint a szoros KT ütemtervek. Tudjuk, hogy ezek nem dominánsok minden esetben. Érdekes azonban megvizsgálnunk az $R_{10}(Q)$ és $R_{20}(Q)$ ütemtervek $\gamma_{10}(Q)$ és $\gamma_{20}(Q)$ hatékonyságának a viszonyát.

Nyilvánvaló, hogy ha egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció két $R_1(Q)$ és $R_2(Q)$ KT ütemterve lényegében azonos, azaz

$$R_1(Q) \approx R_2(Q)$$

akkor $\gamma_1(Q) = \gamma_2(Q)$, azonos hatékonyságuk. Ilyenkor a redukált Q_v konfiguráció azonos stratégiák szerinti $R_i(Q_v)$ ütemtervei is lényegében azonosak és azonos a hatékonyságuk. A 4.5. Tétel utáni 1. Megjegyzés szerint ha $R_1(Q_v) \approx R_2(Q_v)$, akkor ez igaz az eredeti Q megfelelő ütemterveire is. $\gamma_1(Q_v) = \gamma_2(Q_v)$ egyenlőségből azonban $\gamma_1(Q) = \gamma_2(Q)$ nem következik.

Az $\eta = 0$ esetben $v \geq 0$ \mathcal{D} -összetettségi fok lehet véges vagy végtelen. Véges esetben $Q_v = \mathcal{D}^v Q$ redukált konfiguráció létezik.

$v = \infty$ esetben // 4.3/ különleges eset/ tekintsük a $0 = \lim_{v \rightarrow \infty} D^v Q$ nulla-konfigurációt a Q redukáltjának.

$\eta = 0$ miatt $\delta = 0$ bármely megengedhető ütemtervre igaz, ezért $\delta_1(Q) = \delta_2(Q)$ mindig igaz függetlenül $R_1/Q \approx R_2/Q$ teljesülésétől.

$\eta > 0$ esetben felmerül azonban a kérdés, hogy $R_{10}(Q) \neq R_{20}(Q)$ esetén mi a feltétele annak, hogy $\delta_{10}(Q) \leq \delta_{20}(Q)$ legyen.

A 4.7. Tétel /C/ állítása szerint

$$R_{10}(Q_v) \neq R_{20}(Q_v)$$

csak a 4.3. Táblázat 2,3,8, 10-13 soraiban áll fenn, ezért csak itt kell δ_{10} és δ_{20} viszonyát vizsgálnunk.

Felhasználjuk a /4.50/ és /4.30/ formulákat:

$$\begin{aligned} /4.71/ \quad & \mu_{1=B_{2v-2}} \mu_{1,v+B_{2v-1}} \mu_{2,v} \\ & \mu_{2=A_{2v-2}} \mu_{1,v+A_{2v-1}} \mu_{2,v} \end{aligned} , \quad \underline{\mu} = \underline{D}^T \underline{\mu}_v$$

$$\begin{aligned} /4.72/ \quad & \tau_{1=A_{2v-1}} \tau_{1,v+A_{2v-2}} \tau_{2,v} \\ & \tau_{2=B_{2v-1}} \tau_{1,v+B_{2v-2}} \tau_{2,v} \end{aligned} , \quad \underline{\tau} = \underline{D}^{-1} \underline{\tau}_v$$

A 4.4. Tétel szerint a /4.4/ kivételes esetek kivételével $i=1,2$ mellett

$$p_{i0} = \mu_1 \tau_1 + \varepsilon_1 \eta_2 = \mu_2 \tau_2 + \varepsilon_2 \eta_1$$

$$a_{i0} = \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2$$

$$/4.73/ \quad \delta_{i0} = \frac{a_{i0}}{p_{i0}} = /1 - \frac{\varepsilon_1 \eta_2}{p_{i0}} / \delta^{(1)} + /1 - \frac{\varepsilon_2 \eta_1}{p_{i0}} / \delta^{(2)} .$$

A /4.4/ kivételes esetekben $\delta=1$ korrekciós tényezővel p_{i0} és a_{i0} korrigálandó a /4.6'/és /4.7'/ szerint. E formulákat alább használjuk. Jelölje

$\Pi_{ia_2a_3}$ a redukált $R_{i0}(Q_v)$ és Π_{i0} a nem-redukált $R_{i0}/Q/$ ütemterv jellemzőit $/i=1,2/$.

$R_{ia_2a_3}$ az $R_{i0}(Q_v)$ 4.3. Tétel szerinti típusa.

Az $i=2$ esetben legyen megkülönböztetésül

$\Pi_{20}=(\mu'_1; \mu'_2; \varepsilon'_1; \varepsilon'_2/$ a jellemzők jelölése.

Vizsgáljuk meg sorban γ_{10} és γ_{20} viszonyát a 2,3,8, 10-13 esetekben.

(2)eset $/x_1=0, x_2<0/$: $Q_v = / \eta_1; 0; 0; 0/$,

$Q_0 = / \eta_1; (A_{2v-1}-1) \eta_1; 0; B_{2v-1} \eta_1/$,

$\Pi_{111} = /1; 0; 0; 1/$, $\Pi_{(212)} = /0; 1; 0; 0/$ /ugyanis a 2. Megállapodást nem szabad figyelembe venni, ezért

$\Pi_{212} = /1; 1; 0; 1/$ nem lenne helyes./A jellemzők:

$\mu_1 = B_{2v-2}$, $\mu_2 = A_{2v-2}$, $\mu'_1 = B_{2v-1}$, $\mu'_2 = A_{2v-1}$,

$p_{10} = B_{2v-2} A_{2v-1} \eta_1 = A_{2v-2} B_{2v-1} \eta_1 + \eta_1$,

$p_{20} = B_{2v-1} A_{2v-1} \eta_1 = A_{2v-1} B_{2v-1} \eta_1$,

$\gamma_{10} = \gamma^{(1)} = \gamma_{20} = \frac{1}{A_{2v-1}}$, ahol $\gamma^{(i)} = \frac{\eta_i}{\varepsilon_i}$.

(3)eset $/x_1<0, x_2=0/$: $Q_v = /0; 0; \eta_2; 0/$,

$Q_0 = /0; A_{2v-2} \eta_2; \eta_2; (B_{2v-2}-1) \eta_2/$,

$\Pi_{(121)} = /1; 0; 0; 0/$, $\Pi_{222} = /0; 1; 1; 0/$,

$\mu_1 = B_{2v-2}$, $\mu_2 = A_{2v-2}$, $\mu'_1 = B_{2v-1}$, $\mu'_2 = A_{2v-1}$,

$$p_{10} = B_{2v-2} A_{2v-2} \eta_2 = A_{2v-2} B_{2v-2} \eta_2 ,$$

$$p_{20} = B_{2v-1} A_{2v-2} \eta_2 + \eta_2 = A_{2v-1} B_{2v-2} \eta_2$$

$$\gamma_{10} = \gamma^{(2)} = \gamma_{20} = \frac{1}{B_{2v-2}} .$$

$$(8) \text{ eset } /x_1 < 0, x_2 < 0/: Q_v = / \eta_1; 0; \eta_2; 0/ .$$

$$Q_0 = / \eta_1; (A_{2v-1}-1) \eta_1 + A_{2v-2} \eta_2; \eta_2; B_{2v-1} \eta_1 + (B_{2v-2}-1) \eta_2/ ,$$

$$\Pi_{(121)} = /1; 0; 0; 1/ , \Pi_{(212)} = /0; 1; 1; 0/ ,$$

$$\mu_1 = B_{2v-2}, \mu_2 = A_{2v-2}, \mu'_1 = B_{2v-1}, \mu'_2 = A_{2v-1}$$

$$p_{10} = B_{2v-2} \tau_1 = A_{2v-2} \tau_2 + \eta_1$$

$$p_{20} = B_{2v-1} \tau_1 + \eta_2 = A_{2v-1} \tau_2$$

$$\gamma_{10} = \gamma^{(1)} + /1 - \frac{\eta_1}{p_{10}} / \gamma^{(2)}, \quad \gamma_{20} = /1 - \frac{\eta_2}{p_{20}} / \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} ,$$

$$\gamma_{10} \gtrless \gamma_{20} \iff -\frac{\eta_1}{p_{10}} \gamma^{(2)} \gtrless -\frac{\eta_2}{p_{20}} \gamma^{(1)} \iff p_{10} \tau_2 \gtrless p_{20} \tau_1$$

$$\iff B_{2v-2} \gtrless A_{2v-1} \iff 0 \gtrless A_{2v-1} - B_{2v-2} .$$

Mindig egyenlőség igaz, ha $v=0$. Ekkor valóban $\gamma_{10} = \gamma_{20} = 1$.

$$(10) \text{ eset } /x_1 = 0, x_2 < 0/: Q_v = / \eta_1; 0; 0; \vartheta_{2,v}/, \quad \vartheta_{2,v} < \eta_1 .$$

$$Q_0 = / \eta_1; (A_{2v-1}-1) \eta_1 + A_{2v-2} \vartheta_{2,v}; 0; B_{2v-1} \eta_1 + B_{2v-2} \vartheta_{2,v}/ ,$$

$$\Pi_{111} = /1; 0; 0; 1/, \quad \Pi_{212} = /1; 1; 0; 1 - \vartheta_{2,v} / \eta_1/ ,$$

$$\mu_1 = B_{2v-2}, \mu_2 = A_{2v-2}, \mu'_1 = B_{2v-2} + B_{2v-1}, \mu'_2 = A_{2v-2} + A_{2v-1},$$

$$p_{10} = B_{2v-2} \tau_1 = A_{2v-2} \tau_2 + \eta_1$$

$$p_{20} = (B_{2v-2} + B_{2v-1}) \tau_1 = (A_{2v-2} + A_{2v-1}) \tau_2 + \eta_1 - \vartheta_{2,v} ,$$

$$\gamma_{10} = \gamma^{(1)} + /1 - \frac{\eta_1}{p_{10}} / \gamma^{(2)} = \gamma^{(1)}, \quad \gamma_{20} = \gamma^{(1)} + /1 - \frac{\eta_1 - \vartheta_{2,v}}{p_{20}} / \gamma^{(2)} = \gamma^{(1)} ,$$

$$\text{mivel } \gamma^{(2)} = 0. \text{ Vagyis } \gamma_{10} = \gamma_{20} = \gamma^{(1)}.$$

$$(11) \text{ eset } /x_1 < 0, x_2 = 0/: \quad Q_v = /0; \vartheta_{1,v}; \eta_2; 0/, \quad \vartheta_{1,v} < \eta_2.$$

$$Q_0 = /0; A_{2v-1} \vartheta_{1,v} + A_{2v-2} \eta_2; \eta_2; B_{2v-1} \vartheta_{1,v} + (B_{2v-2} - 1) \eta_2/,$$

$$\Pi_{121} = /1; 1; 1 - \vartheta_{1,v} / \eta_2; 0/, \quad \Pi_{222} = /0; 1; 1; 0/,$$

$$\mu_1 = B_{2v-2} + B_{2v-1}, \quad \mu_2 = A_{2v-2} + A_{2v-1}, \quad \mu'_1 = B_{2v-1}, \quad \mu'_2 = A_{2v-1},$$

$$p_{10} = (B_{2v-2} + B_{2v-1}) \tau_1 + \eta_2 - \vartheta_{1,v} = (A_{2v-2} + A_{2v-1}) \tau_2,$$

$$p_{20} = B_{2v-1} \tau_1 + \eta_2 = A_{2v-1} \tau_2,$$

$$\gamma_{10} = /1 - \frac{\eta_2 - \vartheta_{1,v}}{p_{10}} / \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} = \gamma^{(2)}; \quad \gamma_{20} = /1 - \frac{\eta_2}{p_{20}} / \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} = \gamma^{(2)},$$

$$\text{mivel } \gamma^{(1)} = 0. \text{ Vagyis } \gamma_{10} = \gamma_{20} = \gamma^{(2)}.$$

$$(12) \text{ eset } /x_1 < 0, x_2 < 0/: \quad Q_v = / \eta_1; \vartheta_{1,v}; \eta_2; 0/, \quad \vartheta_{1,v} < \eta_2.$$

$$Q_0 = / \eta_1; (A_{2v-1} - 1) \eta_1 + A_{2v-1} \vartheta_{1,v} + A_{2v-2} \eta_2; \eta_2; B_{2v-1} \tau_{1,v} + (B_{2v-2} - 1) \eta_2/,$$

$$\Pi_{121} = /1; 1; 1 - \vartheta_{1,v} / \eta_2; 1/, \quad \Pi_{222} = /0; 1; 1; 0/,$$

$$\mu_1 = B_{2v-2} + B_{2v-1}, \quad \mu_2 = A_{2v-2} + A_{2v-1}, \quad \mu'_1 = B_{2v-1}, \quad \mu'_2 = A_{2v-1},$$

$$p_{10} = (B_{2v-2} + B_{2v-1}) \tau_1 + \eta_2 - \vartheta_{1,v} = (A_{2v-2} + A_{2v-1}) \tau_2 + \eta_1$$

$$p_{20} = B_{2v-1} \tau_1 + \eta_2 = A_{2v-1} \tau_2$$

$$\gamma_{10} = /1 - \frac{\eta_2 - \vartheta_{1,v}}{p_{10}} / \gamma^{(1)} + /1 - \frac{\eta_1}{p_{10}} / \gamma^{(2)}, \quad \gamma_{20} = /1 - \frac{\eta_2}{p_{20}} / \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)},$$

$$\gamma_{10} \geq \gamma_{20} \Leftrightarrow - \frac{\eta_2 - \vartheta_{1,v}}{p_{10}} \gamma^{(1)} - \frac{\eta_1}{p_{10}} \gamma^{(2)} \geq - \frac{\eta_2}{p_{20}} \gamma^{(1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta_1 \eta_2}{\tau_1 p_{20}} \geq \frac{\eta_1 (\eta_2 - \vartheta_{1,v})}{\tau_1 p_{10}} + \frac{\eta_1 \eta_2}{\tau_2 p_{10}} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{2p_{10}} &\geq 1 - \frac{\vartheta_{1,v}}{\eta_2} / \tau_{2p_{20}} + \tau_{1p_{20}} \Leftrightarrow \\
 \tau_{2(B_{2v-2}+B_{2v-1})} \tau_1 + \tau_2(\eta_2 - \vartheta_{1,v}) &\geq (1 - \frac{\vartheta_{1,v}}{\eta_2}) \tau_2(B_{2v-1} \tau_1 + \eta_2) + \tau_1 A_{2v-1} \tau_2 \\
 \Leftrightarrow (B_{2v-2} + \frac{\vartheta_{1,v}}{\eta_2} B_{2v-1} - A_{2v-1}) \tau_1 &\geq 0 \Leftrightarrow \\
 \vartheta_{1,v} B_{2v-1} &\geq \eta_2 (A_{2v-1} - B_{2v-2}) \Leftrightarrow \\
 \tau_{2-B_{2v-1}} \eta_1 - B_{2v-2} \eta_2 &\geq \eta_2 (A_{2v-1} - B_{2v-2}) \Leftrightarrow \\
 \tau_2 &\geq B_{2v-1} \eta_1 + A_{2v-1} \eta_2 . \\
 \text{Vagyis } \delta_{10} &\geq \delta_{20} \text{ aszerint, hogy} \\
 \vartheta_{1,v} B_{2v-1} &\geq \eta_2 (A_{2v-1} - B_{2v-2}) \Leftrightarrow \tau_2 \geq B_{2v-1} \eta_1 + A_{2v-1} \eta_2 . \\
 v=0 \text{ esetén } B_{2v-1} &= A_{2v-1} - B_{2v-2} = 0, \text{ ezért csak } = \text{ állhat fenn.}
 \end{aligned}$$

(13)eset $/x_1 < 0, x_2 < 0/$: $Q_v = / \eta_1; 0; \eta_2; \vartheta_{2,v} /$, $\vartheta_{2,v} < \eta_1$.

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= / \eta_1; (A_{2v-1} - 1) \eta_1 + A_{2v-2} \tau_{2,v}; \eta_2; B_{2v-1} \eta_1 + (B_{2v-2} - 1) \eta_2 + B_{2v-2} \vartheta_{2,v} / , \\
 \Pi_{111} &= / 1; 0; 0; 1 / , \quad \Pi_{212} = / 1; 1; 1; 1 - \vartheta_{2,v} \eta_1 / , \\
 \mu_1 &= B_{2v-2}, \quad \mu_2 = A_{2v-2}, \quad \mu_1' = B_{2v-2} + B_{2v-1}, \quad \mu_2' = A_{2v-2} + A_{2v-1}, \\
 p_{10} &= B_{2v-2} \tau_1 = A_{2v-2} \tau_2 + \eta_1 \\
 p_{20} &= (B_{2v-2} + B_{2v-1}) \tau_1 + \eta_2 = (A_{2v-2} + A_{2v-1}) \tau_2 + \eta_1 - \vartheta_{2,v} \eta_1 , \\
 \delta_{10} &= \delta_{10}^{(1)} + 1 - \frac{\eta_1}{p_{10}} / \delta_{10}^{(2)}, \quad \delta_{20} = 1 - \frac{\eta_2}{p_{20}} / \delta_{20}^{(1)} + 1 - \frac{\eta_1 - \vartheta_{2,v} \eta_1}{p_{20}} / \delta_{20}^{(2)} , \\
 \delta_{10} &\geq \delta_{20} \Leftrightarrow - \frac{\eta_1}{p_{10}} \delta_{10}^{(2)} \geq - \frac{\eta_2}{p_{20}} \delta_{20}^{(1)} - \frac{\eta_1 - \vartheta_{2,v} \eta_1}{p_{20}} \delta_{20}^{(2)} \Leftrightarrow \\
 \frac{\eta_1 \eta_2}{p_{20} \tau_1} + \frac{(\eta_1 - \vartheta_{2,v} \eta_1) \eta_2}{p_{20} \tau_2} &\geq \frac{\eta_1 \eta_2}{p_{10} \tau_2} \Leftrightarrow \\
 p_{10} \tau_2 + 1 - \frac{\vartheta_{2,v}}{\eta_1} / p_{10} \tau_1 &\geq p_{20} \tau_1 \Leftrightarrow \\
 B_{2v-2} \tau_1 \tau_2 + (1 - \frac{\vartheta_{2,v}}{\eta_1}) / (A_{2v-2} \tau_2 + \eta_1) \tau_1 &\geq (A_{2v-2} + A_{2v-1}) \tau_2 \tau_1 + (\eta_1 - \vartheta_{2,v} \eta_1) \tau_2 \\
 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$/B_{2v-2} - \frac{\gamma_{2,v}}{\eta_1} A_{2v-2} - A_{2v-1} / \tau_2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$- \gamma_{2,v} A_{2v-2} \geq \eta_1 / A_{2v-1} - B_{2v-2} / \Leftrightarrow$$

$$A_{2v-1} \eta_1 - \tau_1 + A_{2v-2} \eta_2 \geq \eta_1 / A_{2v-1} - B_{2v-2} / \Leftrightarrow$$

$$B_{2v-2} \eta_1 + A_{2v-2} \eta_2 \geq \tau_1$$

Vagyis $\gamma_{10} \geq \gamma_{20}$ aszerint, hogy

$$- \gamma_{2,v} A_{2v-2} \geq \eta_1 / A_{2v-1} - B_{2v-2} / \Leftrightarrow$$

$$B_{2v-2} \eta_1 + A_{2v-2} \eta_2 \geq \tau_1 \cdot v=0 \text{ esetén}$$

$A_{2v-2} = A_{2v-1} - B_{2v-2} = 0$, ezért csak egyenlőség lehet.

Ezzel megvizsgáltuk az összes olyan esetet, amikor $R_{10}(Q) \neq R_{20}(Q)$. Eredményeinket egy tételbe foglaljuk.

4.8. Tétel: Bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció $R_{10}(Q)$ összefüggő prioritásos ütemterveire vonatkozóan igazak a következő állítások $/Q_v$ a Q \mathcal{D} -redukáltja/:

$$/A/ \quad R_{10}(Q) \approx R_{20}(Q)$$

kivéve, ha

$$/4.74/ \quad \eta_i > 0, \quad \gamma_{i,v} = 0 \text{ legalább egyik } i=1,2\text{-re.}$$

A /4.74/ a 4.2. Táblázat 2,3,8, 10-13 sorainál teljesül.

$$/B/ \quad \gamma_{10}(Q) = \gamma_{20}(Q)$$

kivéve, ha

$$/4.75/ \quad v > 0, \eta_1 \eta_2 > 0 \text{ és } \vartheta_{1,v} \vartheta_{2,v} = 0.$$

A /4.75/ a 4.2. Táblázat 8,12,13 soraiban teljesül, ha $v > 0$.

$$/C/ \quad \delta_{10}(Q) \geq \delta_{20}(Q)$$

a /4.75/ feltétel mellett aszerint, hogy

$$/4.76/ \quad \eta_1 \vartheta_{1,v}^{B_{2v-1}} - \eta_2 \vartheta_{2,v}^{A_{2v-2}} \geq \eta_1 \eta_2^{A_{2v-1} - B_{2v-2}}.$$

1. Megjegyzés: A /4.75/ esetén /4.74/ teljesül, tehát

$$\delta_{10} \neq \delta_{20} \text{ csak } R_{10} \neq R_{20} \text{ esetén lehetséges.}$$

2. Megjegyzés: A /4.76/ feltétel a /4.75/ mellett ekvivalens az alábbiakkal:

$$/4.76'/ \quad B_{2v-2} \eta_1^{A_{2v-2}} \eta_2 \geq \tau_1 - \frac{\vartheta_{1,v}}{\eta_2} \tau_2$$

$$/4.76''/ \quad \tau_2 - \frac{\vartheta_{2,v}}{\eta_1} \tau_1 \geq B_{2v-1} \eta_1 + A_{2v-1} \eta_2$$

$$/4.76'''/ \quad B_{2v-1} \vartheta_{1,v} \left(1 + \frac{\tau_{1,v}}{\eta_2}\right) - A_{2v-2} \vartheta_{2,v} \left(1 + \frac{\tau_{2,v}}{\eta_1}\right) \geq (\tau_{1,v} + \tau_{2,v}) (A_{2v-1} - B_{2v-2})$$

Bizonyítás: Az /A/ és /B/ állítások már bizonyítva vannak. $v=0$ mellett a /B/ igaz a (8), (12) és (13) esetekben is. A /C/ állítás és a 2. Megjegyzés bizonyításához azt kell igazolnunk, hogy a /4.76/-/4.76'''/ feltételek a /4.75/ mellett ekvivalensek egymással és a (8), (12) és (13) esetben igazolt feltételekkel, amelyek alakja

$$/4.77/ \quad 0 \geq A_{2v-1} - B_{2v-2}, \text{ ha } \vartheta_{1,v} = \vartheta_{2,v} = 0 \quad / (2) \text{ eset} /$$

$$/4.77'/ \quad \vartheta_{1,v} B_{2v-1} \geq \eta_2 / A_{2v-1} - B_{2v-2} / \Leftrightarrow \tau_2 \geq B_{2v-1} \eta_1 + A_{2v-1} \eta_2$$

$$\text{ha } \vartheta_{1,v} > 0, \vartheta_{2,v} = 0 \quad / (12) \text{ eset} /$$

$$/4.77''/ \quad -\vartheta_{2,v} A_{2v-2} \geq \eta_1 / A_{2v-1} - B_{2v-2} / \Leftrightarrow B_{2v-2} \eta_1 + A_{2v-2} \eta_2 \geq \tau_1$$

$$\text{ha } \vartheta_{1,v} = 0, \vartheta_{2,v} > 0 \quad / (13) \text{ eset} /$$

(8) eset / $\vartheta_{1,v} = \vartheta_{2,v} = 0$; $\vartheta_{1,v} = 0$ helyettesítéssel a /4.76/ átmegy a /4.77/-be és a /4.76'/ átmegy /4.77''/-be, ami most ekvivalens a /4.77/-tel. A /4.76''/ ekvivalens a /4.77'-vel, az pedig a /4.77/-tel. A /4.76'''/ közvetlenül átmegy /4.77/-be.

(12) eset / $\vartheta_{2,v} = 0$: $\vartheta_{2,v} = 0$ helyettesítéssel a /4.76/ és /4.76''/ közvetlenül átmennek a /4.77'/ két alakjába.

A /4.76'/-be a /4.72/-t helyettesítve $\vartheta_{2,v} = 0$ mellett

$$B_{2v-2} \eta_1 + A_{2v-2} \eta_2 \geq (A_{2v-1} \tau_{1,v} + A_{2v-2} \eta_2) - (\vartheta_{1,v} / \eta_2) (B_{2v-1} \tau_{1,v} + B_{2v-2} \eta_2) \Leftrightarrow B_{2v-2} \tau_{1,v} \geq (A_{2v-1} (\vartheta_{1,v} / \eta_2) B_{2v-1}) \tau_{1,v} \Leftrightarrow /4.77' /.$$

A /4.76'''/-be $\vartheta_{2,v} = 0$ téve, majd $/1 + \tau_{1,v} / \eta_2 /$ -vel egyszerűsítve a /4.77'/ alakot kapjuk.

(13) eset / $\vartheta_{1,v} = 0$: Szimmetria miatt nem szükséges külön bizonyítani, mert hasonló a (12) esethez.

Q.e.d.

E tétel tisztázza az $R_{i0}/Q/$, $i=1,2$, ütemtervek hatékonyságának egymáshoz való viszonyát. Az R_{i0} ütemtervek nem feltétlenül dominánsak. Nyitott kérdés az, hogy mikor dominánsak. Ez a kérdés azonban nem valószínű, hogy a \mathcal{D} -redukció, vagy a /4.5/ egyenlőtlenségek megoldása nélkül eldönthető lenne. Ezért most rátérünk a Δ -Algoritmus és a \mathcal{D} -Algoritmus definiálására és elemzésére.

Δ -Algoritmus: Bemenő adatok: $Q=/\eta_1; \vartheta_1; \eta_2; \vartheta_2/$

Kimenő adatok: $\omega_i^*/B_i^*, A_i^*/, \Delta_i^*$, $i=1,2$

0. Lépés: $\tau_1 := \eta_1 + \vartheta_1$; $\tau_2 := \eta_2 + \vartheta_2$; $\eta := \eta_1 + \eta_2$; $\vartheta := \vartheta_1 + \vartheta_2$;

Ha $\tau_1 \tau_2 \eta \vartheta = 0$, akkor HIBA és Vége;

$$\xi_0 = \tau_1 / \tau_2, \quad \alpha = \eta / \tau_2, \quad U = 1/\alpha,$$

$$A_{-2} = 0, \quad B_{-2} = 1, \quad A_{-1} = 1, \quad B_{-1} = 0, \quad v = 0;$$

1. Lépés: $b_v := [\xi_v]$

$$A_v := b_v A_{v-1} + A_{v-2}, \quad B_v := b_v B_{v-1} + B_{v-2};$$

Ha $B_v < U$, akkor 2. Lépés;

3. Lépés;

2. Lépés: Ha $\xi_v - b_v = 0$, akkor

$$B_1^* = B_v, A_1^* = A_v, B_2^* = A_v, A_2^* = B_v$$

$$\Delta_1^* = 0, \Delta_2^* = 0 \text{ és Vége;}$$

$$\xi_{v+1} := \frac{1}{\xi_v - b_v}; \quad v := v+1 \text{ és 1. Lépés;}$$

3. Lépés: $/B_v \geq U, B_{v-1} < U/$:

$$v-1$$

$$\text{Ha } v=0, \text{ akkor } c := f \geq (\xi_0 - \alpha), B_1^* = 1, A_1^* = c,$$

$$B_2^* = 1, A_2^* = 0, \Delta_1^* = / \xi_0 - c / \tau_2, \Delta_2^* = \tau_2 \text{ és Vége;}$$

$$B'_{v-1} = \xi_{v-1} B_{v-2} + B_{v-3}; \quad B'_v = \xi_v B'_{v-1};$$

$$\text{Ha } B'_{v-1} \geq U, \text{ akkor}$$

v	ω_1^*	$\bar{\omega}_2^*$	Δ_1^*	Δ_2^*
páros	$/B_{v-2}, A_{v-2}/$	$/B_{v-1}, A_{v-1}/$	$1/B'_{v-1}$	$1/B'_v$
páratlan	$/B_{v-1}, A_{v-1}/$	$/B_{v-2}, A_{v-2}/$	$1/B'_v$	$1/B'_{v-1}$

$$\text{Ha } B'_{v-1} < U, \text{ akkor}$$

$$c = f \geq (\xi_v / 1 - \alpha B'_{v-1} - 1/)$$

$$|\Delta_{v,c}| = \alpha - \frac{\{\xi_v / \alpha B'_{v-1} - 1/\}}{\xi_v B'_{v-1}}$$

v	ω_1^*	$\bar{\omega}_2^*$	Δ_1^*	Δ_2^*
páros	$/B_{v,c}, A_{v,c}/$	$/B_{v-1}, A_{v-1}/$	$ \Delta_{v,c} $	$1/B'_v$
páratlan	$/B_{v-1}, A_{v-1}/$	$/B_{v,c}, A_{v,c}/$	$1/B'_v$	$ \Delta_{v,c} $

Vége;

Megjegyzés: Az algoritmus $\tau_1 \tau_2 \gamma^{\mathcal{J}} = 0$ esetben nem működik: A /4.5/ egyenlőtlenségek megoldása ebben az esetben ugyanis a KT-Diagram szerint nélkülözhető a KT ütemtervek vizsgálatához. E feltevésből következik, hogy $0 < \xi_0 < \infty$, $0 < \alpha < \infty$. Ilyenkor a

$$0 \leq B_1 \xi_0 - A_1 \leq \alpha \quad \text{és} \quad -\alpha \leq A_2 \xi_0 - B_2 \leq 0$$

egyenlőtlenségeknek /koincidencia feladatoknak/ a 2. Fejezet eredményei szerint mindig van legkisebb $\omega_i = /B_i, A_i/ \geq /1, 0/$ megoldása. Be kell bizonyítani, hogy az algoritmus ω_i^* , Δ_i^* , $i=1,2$, kimenetei e megoldások és hibáik.

A Δ -Algoritmus igazolása: A 2. Fejezet eredményeiből felhasználjuk a következőket.

$$/4.78/ \quad |\Delta_{v,c}| = \frac{\xi_v - c}{B'_v}, \quad 0 \leq c \leq b_v, \quad 0 \leq v < \Pi$$

$$|\Delta_v| = \frac{1}{B'_{v+1}} \quad 0 \leq v < N$$

$$\omega_{v, b_v} = \omega_v = \omega_{v+2, 0}$$

$$\xi_{v+1} B'_v = B'_{v+1}$$

$$/4.79/ \quad |\Delta_{v,b_v}| < |\Delta_{v+1,c}| < |\Delta_{v-1,b_{v-1}}| < |\Delta_{v,c}| < |\Delta_{v-2,b_{v-2}}| ,$$

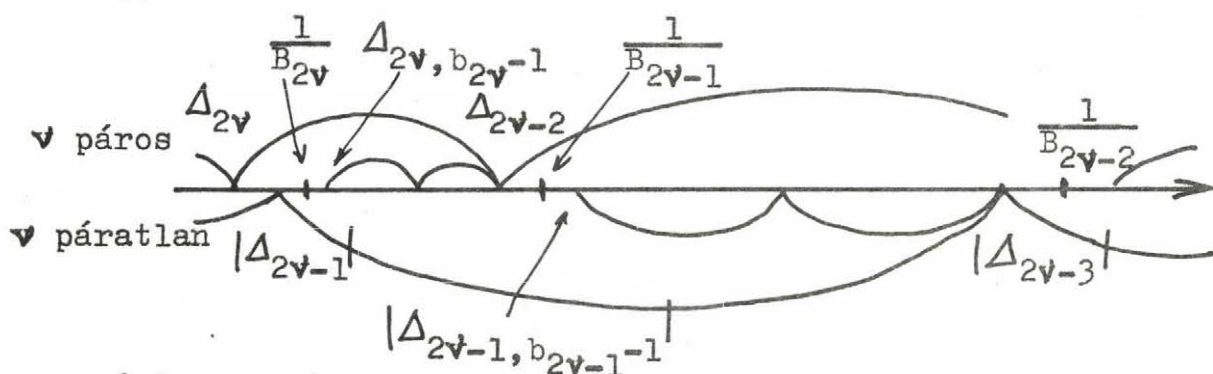
ahol $0 < c' < b_{v+1}$, $0 < c < b_v$. Ebből

$$/4.79'/ \quad \frac{1}{B'_{v+1}} < \frac{\xi_{v+1}-c'}{B'_{v+1}} < \frac{1}{B'_v} < \frac{\xi_v-c}{B'_v} < \frac{1}{B'_{v-1}} .$$

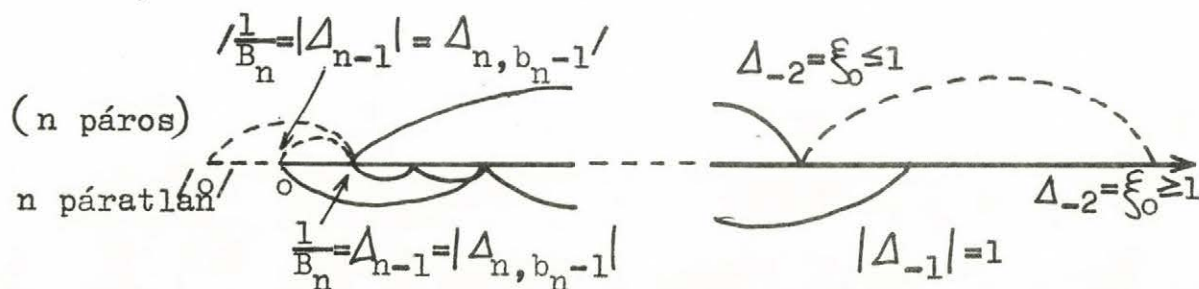
Ezenkívül $v < N-1$ esetén

$$/4.80/ \quad \frac{1}{B'_v} < \frac{1}{B_v} < \frac{\xi_v-b_{v+1}}{B'_v} = \frac{1+\xi_{v+1}}{B'_{v+1}}$$

egyszerűen bizonyítható. Ezek az egyenlőtlenségek igazolják az alábbi szemléltető 4.13. Ábrákat, amelyeken a $|\Delta_{v,c}|$ hibákat ábrázoltuk.



(a) Közbülső közelítő megoldások



(b) Utolsó közelítő megoldások; (c) Az első köz. megoldások

4.13. Ábra: A /4.5/ KIF-ek Ω^\pm megoldásainak lehetséges hibái.

Az algoritmus mindaddig a $\xi_v, b_v, A_v, B_v, v=0,1,\dots$ sorozatokat állítja elő, amíg $\xi_v - b_v = 0$, vagy $B_v \geq U$ feltétel be nem következik.

Ha $\xi_v - b_v = 0$, akkor $\xi_0 = \frac{A_v}{B_v}$ racionális és $|\Delta_{v-1}| = |\Delta_{v,b_{v-1}}| = 1/B_v$. Ezért $B_v < U$ esetén $1/B_v > \alpha$ és a /4.5/ egyenlőtlenségeknek a legkisebb megoldása $\omega_1^* = \bar{\omega}_2^* = /B_v, A_v/$, $\Delta_1^* = \Delta_2^* = 0$, amelyet az algoritmus a 2. Lépésben szolgáltat. Ha $B_v \geq U$, azaz $1/B_v \leq \alpha$, akkor $\xi_v - b_v = 0$ esetén is a 3. Lépés hajtódik végre. $B_0 = 1$ miatt a 3. Lépésben $v=0$ akkor, ha $U \leq 1$, azaz $\alpha \geq 1$, vagyis $\eta \geq \tau_2$, $\eta_1 \geq \eta_2$. Ekkor valóban $\omega_2^* = /1, 0/$ és $\Delta_2^* = \tau_2$. Az $\omega_1^* = /1, c/$ megoldás következik például a 3.15. Lemma utáni 3. Megjegyzésből.

Ha $v > 0$ és $B_v \geq U$, akkor szükségképpen $B_{v-1} < U$. Ezekből

$$\frac{1}{B_{v-1}} > \alpha, \frac{1}{B_v} \leq \alpha \quad \text{és} \quad \frac{1}{B'_v} \leq \alpha$$

következik. A 4.13/(a) Ábra mutatja, hogy ω_i^* közül legalább egyiket ω_μ főközelítés alkotja és v paritásától függ, hogy melyik lehet mellék-közelítés. Az, hogy az egyik lehet-e mellék-közelítés, a B'_{v-1} és U , azaz

$$|\Delta_{v-2}| = \frac{1}{B'_{v-1}} \quad \text{és} \quad \alpha \quad \text{viszonya dönti el. Ennek megfelelő}$$

az algoritmus 3. Lépésében az esetek szétválasztása. Az ω_1^* és $\bar{\omega}_2^*$ táblázatokban feltüntetett megoldásának jellege a 4.13/(a) Ábra alapján könnyen ellenőrizhető.

Csupán c és $|\Delta_{v,c}|$ formuláit kell igazolnunk. /4.78/ alapján

$$|\Delta_{v,c}| = \frac{\xi_v - c}{B'_v} \leq \alpha$$

akkor, ha $c \geq \xi_v - \alpha B_v' = \xi_v / 1 - \alpha B_{v-1}'$, ami
 igazolja c formuláját. Felhasználva, hogy $f_{\geq}(z) = -f_{\leq}(-z) =$
 $= -[-z]$ és $f_{\geq}(z) - z = (-z) - [-z] = \{-z\}$, kapjuk,
 hogy

$$|\Delta_{v,c}| = \alpha - \frac{c - \xi_v + \alpha B_v'}{B_v'} = \alpha - \frac{f_{\geq}(\xi_v / 1 - \alpha B_{v-1}') - \xi_v / 1 - \alpha B_{v-1}'}{\xi_v B_{v-1}'},$$

amiből már az algoritmus formulája adódik.

Q.e.d.

D-Algorithmus: Bemenő adatok: $Q = / \eta_1; \vartheta_1; \eta_2; \vartheta_2 /$

Kimenő adatok: $v, Q^* = / \eta_1^*; \vartheta_1^*; \eta_2^*; \vartheta_2^* /$, $\underline{D} = (d_{ij})$

0. Lépés: $\tau_1 := \eta_1 + \vartheta_1$; $\tau_2 := \eta_2 + \vartheta_2$; $\eta := \eta_1 + \eta_2$; $\vartheta := \vartheta_1 + \vartheta_2$; $v := 0$;

$A := B' := 0$; $A' := B := 1$;

1. Lépés: Ha $\tau_2 = 0$, akkor $\ell_1 := 0$ és 2. Lépés;

$\ell_1 := [\vartheta_1 / \tau_2]$;

2. Lépés: $\vartheta_1 := \vartheta_1 - \ell_1 \tau_2$; $\tau_1 := \eta_1 + \vartheta_1$;

$A := \ell_1 A' + A$; $B := \ell_1 B' + B$;

Ha $\tau_1 = 0$, akkor $\ell_2 := 0$ és 3. Lépés;

$\ell_2 := [\vartheta_2 / \tau_1]$;

3. Lépés: $\vartheta_2 := \vartheta_2 - \ell_2 \tau_1$; $\tau_2 := \eta_2 + \vartheta_2$;

$A' := \ell_2 A + A'$; $B' := \ell_2 B + B'$;

Ha $\ell_1 + \ell_2 > 0$, akkor $v := v + 1$ és 1. Lépés;

4. Lépés: $d_{11} := B$; $d_{12} := A$; $d_{21} := B'$; $d_{22} := A'$;

$\eta_1^* := \eta_1$; $\vartheta_1^* := \vartheta_1$; $\eta_2^* := \eta_2$; $\vartheta_2^* := \vartheta_2$;

Vége;

Az algoritmus igazolása: Az algoritmus a 3. Lépésben mindaddig növeli v értékét és újra ismételteti az 1. és 2. Lépéseket, amíg $\ell_{1,v} + \ell_{2,v} > 0$ mutatkozott.

$\ell_{1,v} + \ell_{2,v} = 0$ első fellépésekor v a \mathcal{D} -összetettségi fok és $Q^* = Q_v$ a redukált konfiguráció. Csupsán azt kell igazolni, hogy a $D = \begin{pmatrix} B & A \\ B' & A' \end{pmatrix}$ mátrix valóban a 4.5. Tétel utáni 4. és 5. Megjegyzésekben definiált

$$D = \begin{pmatrix} B_{2v-2} & A_{2v-2} \\ B_{2v-1} & A_{2v-1} \end{pmatrix}$$

mátrix. Ez azonban következik abból, hogy a 2. és 3. Lépések mindig a D_{v+1} mátrix elemeit szolgáltatják D_v elemeiből és $\ell_{1,v}, \ell_{2,v}$ hányadosokból.

Q.e.d.

A \mathcal{D} -Algoritmus számításigénye a v összetettségi fokkal arányos. Az alábbiakban felső becslést adunk egy Q konfiguráció \mathcal{D} -összetettségi fokának nagyságára. A 4.6. Lemma szerint v véges a /4.3/ különleges eset kivételével. A 4.5. Lemma szerint a \mathcal{D} -redukció generálta $\ell_{i,k}$, $i=1,2$, $k=0,1,\dots$, hányadosok (ℓ) sorozata $v \geq 1$ véges esetben

$$(\ell) : \ell_{1,0}, \ell_{2,0}, \dots, \ell_{1,v-1}, \ell_{2,v-1}, \quad v \geq 1$$

alakú, ahol

$$/4.81/ \quad \ell_{1,0} \geq 0, \quad \ell_{i,k} > 0, \quad /i,k \neq /1,0/, /2,v-1/, \ell_{2,v-1} \geq 0.$$

Nagyon könnyű belátni, hogy a \mathcal{D} -redukció folyamán $\mathcal{V}_{i,k}$, $i=1,2$, $k < v-1$ és $\mathcal{V}_{1,v-1}$ nem lehetnek 0-ák; legfeljebb $\mathcal{V}_{2,v-1}$ és $\mathcal{V}_{1,v}$ lehet 0. Ugyancsak tudjuk, hogy $\mathcal{V}_{i,k}$ paraméterek csökkennek, amíg \mathcal{D} hatásos, azaz $\ell_{1,k} + \ell_{2,k} > 0$. A /4.81/ feltételek mellett az (ℓ) sorozat tagjai tetszőleges egészek lehetnek, így pl. semmiféle felső korlátjuk nem létezik. Egyedül az $\ell_{i,k} \geq 1$ feltételből is felső becslést adhatunk a v összetettségi fokra.

Tegyük fel, hogy $v \geq 2$ és $k \geq 2$. Bizonyítjuk, hogy

$$\begin{aligned} /4.82/ \quad \mathcal{V}_{1,0} - \mathcal{V}_{1,k} &= \ell_{1,0} \ell_{2,0} \tau_{1,1} + (\ell_{1,0} + \ell_{1,1}) \ell_{2,1} \tau_{1,2} + \dots + \\ &\quad + (\ell_{1,0} + \dots + \ell_{1,k-1}) \ell_{2,k-1} \tau_{1,k} + \\ &\quad + (\ell_{1,0} + \dots + \ell_{1,k-1}) \tau_{2,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} /4.83/ \quad \mathcal{V}_{2,0} - \mathcal{V}_{2,k} &= \ell_{2,0} \ell_{1,1} \tau_{2,1} + (\ell_{2,0} + \ell_{2,1}) \ell_{1,2} \tau_{2,2} + \dots + \\ &\quad + (\ell_{2,0} + \dots + \ell_{2,k-2}) \ell_{1,k-1} \tau_{2,k-1} + \\ &\quad + (\ell_{2,0} + \dots + \ell_{2,k-1}) \tau_{1,k} . \end{aligned}$$

$k=2$ -re /4.79/-ből

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{1,0} - \mathcal{V}_{1,2} &= \ell_{1,0} \ell_{2,0} \tau_{1,1} + (\ell_{1,0} + \ell_{1,1}) \ell_{2,1} \tau_{1,2} + \\ &\quad + (\ell_{1,0} + \ell_{1,1}) \tau_{2,2} = \\ &= \ell_{1,0} \ell_{2,0} \tau_{1,1} + \\ &\quad + (\ell_{1,0} + \ell_{1,1}) (\ell_{2,1} \tau_{1,2} + \tau_{2,2}) = \\ &= \ell_{1,0} \ell_{2,0} \tau_{1,1} + (\ell_{1,0} + \ell_{1,1}) \tau_{2,1} = \\ &= \ell_{1,0} (\ell_{2,0} \tau_{1,1} + \tau_{2,1}) + \ell_{1,1} \tau_{2,1} = \\ &= \ell_{1,0} \tau_{2,0} + \ell_{1,1} \tau_{2,1} = \\ &= \mathcal{V}_{1,0} - \mathcal{V}_{1,1} + (\mathcal{V}_{1,1} - \mathcal{V}_{1,2}) , \end{aligned}$$

ami igaz. /4.73/ ből

$$\begin{aligned} \vartheta_{2,0} - \vartheta_{2,2} &= l_{2,0} l_{1,1} \tau_{2,1} + (l_{2,0} + l_{2,1}) \tau_{1,2} = l_{2,0} \tau_{1,1} + l_{2,1} \tau_{1,2} = \\ &= \vartheta_{2,0} - \vartheta_{2,1} + (\vartheta_{2,1} - \vartheta_{2,2}), \end{aligned}$$

ami szintén igaz.

Tegyük fel, hogy /4.82/ és /4.83/ igazak, bizonyítjuk ugyanezt

k helyett k+1-re. /4.72/-hez hozzáadva

$$\vartheta_{1,k} - \vartheta_{1,k+1} = l_{1,k} \tau_{2,k}$$

egyenlőséget, majd helyettesítve

$$\tau_{2,k} = l_{2,k} \tau_{1,k+1} + \tau_{2,k+1}$$

egyenlőséget, a /4.82/-t kapjuk k+1-re. A /4.83/-hoz

$$\vartheta_{2,k} - \vartheta_{2,k+1} = l_{2,k} \tau_{1,k+1}$$

egyenlőséget adva majd

$$\tau_{1,k} = l_{1,k} \tau_{2,k} + \tau_{1,k+1}$$

egyenlőséget helyettesítve, a /4.83/-at kapjuk k+1-re.

A /4.82/ és /4.83/ kifejezések segítségével igazoljuk az alábbi lemmát.

4.10. Lemma: Ha a $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció \mathcal{D} -összetettségi foka $v \geq 0$ véges, akkor $Q_k = \mathcal{D}^k Q$ paramétereivel

$$/4.84/ \quad \vartheta_{1,0} - \vartheta_{1,v} = \sum_{k=1}^v \sum_{r=0}^{k-1} l_{1,r} l_{2,k-1} \tau_{1,k} + \sum_{r=0}^{v-1} l_{1,r} \tau_{2,v},$$

$$/4.85/ \quad \mathcal{J}_{2,0} - \mathcal{J}_{2,v} = \sum_{k=1}^{v-1} \sum_{r=0}^{k-1} \ell_{2,r} \ell_{1,k} \tau_{2,k} + \sum_{r=0}^{v-1} \ell_{2,r} \tau_{1,v},$$

ahol \sum_a^b 0-nak tekintendő, ha $b < a$.

Bizonyítás: $v \geq 2$ esetén a /4.84/ és /4.85/ azonos a /4.82/ illetve /4.83/ összefüggésekkel $k=v$ mellett. $v=0$ esetén a /4.84/ és /4.85/ jobboldala definíció szerint 0, tehát nincs mit bizonyítani. $v=1$ esetén a /4.84/-ből

$$\mathcal{J}_{1,0} - \mathcal{J}_{1,1} = \ell_{1,0} \ell_{2,0} \tau_{1,1} + \ell_{1,0} \tau_{2,1} = \ell_{1,0} \tau_{2,0}$$

és /4.85/-ből

$$\mathcal{J}_{2,0} - \mathcal{J}_{2,1} = \ell_{2,0} \tau_{1,1}$$

helyes egyenlőségek a /4.21/ definíciók szerint.

Q.e.d.

Megjegyzés: A /4.82/ és /4.83/ igazak $k > v$ esetén is. Ha v értéke csak felső korlát az ismeretlen v' \mathcal{O} -összetettségi fokra, akkor $\ell_{1,k} = 0$, $k \geq v'$, miatt /4.84/ és /4.85/ jobboldala akkor is a $\mathcal{J}_{1,0}$, illetve $\mathcal{J}_{2,0}$ paraméterek redukcióját adja meg.

A 4.10. Lemmabeli /4.84/ és /4.85/ kifejezések segítségével felső becsléseket nyerhetünk a v \mathcal{O} -összetettségi fokra, felhasználva a /4.81/ relációkat.

Annak feltételét, hogy $v=0$ legyen, azaz maga a $Q_0 \doteq Q$ \mathcal{O} -redukált, a /4.18/ relációk szolgáltatják. Azt könnyű ellenőrizni. Vagyis könnyű eldönteni, hogy $v > 0$ teljesül-e.

Tegyük fel, hogy $v \geq 1$.

$v \geq 2$ esetén

$$\begin{aligned} & \tau_{1,k} \tau_{2,k} > 0 \text{ és } \vartheta_{i,k} > \tau_{3-i,k}, \quad i=1,2, \quad k \leq v-2 \\ /4.86/ & \tau_{1,v-1} \tau_{2,v-1} > 0 \text{ és } \vartheta_{i,v-1} \geq \tau_{3-i,v-1} \text{ legalább } i=1\text{-re} \end{aligned}$$

feltételek és

$$\begin{aligned} /4.87/ & \tau_{i,k} > \eta_i, \quad i=1,2, \quad k \leq v-2 \\ & \tau_{i,v-1} > \eta_i \text{ legalább } i=1\text{-re} \end{aligned}$$

feltételek teljesülnek.

$v=1$ esetén

$$\begin{aligned} /4.86'/ & \tau_{1,0} \tau_{2,0} > 0 \text{ és } \vartheta_{i,0} \geq \tau_{3-i,0} \text{ legalább egyik} \\ & i=1,2\text{-re} \end{aligned}$$

feltétel és

$$/4.87'/ \quad \tau_{i,0} > \eta_i \text{ legalább egyik } i=1,2\text{-re}$$

feltétel teljesül.

$v \geq 2$ esetén /4.87/-ből $\tau_{2,v-2} > \eta_2$ és $\tau_{1,v-1} > \eta_1$,
ezért a 4.10. Lemma/4.84/ és /4.85/ formuláiból

$$/4.88/ \quad \vartheta_1 > \sum_{k=1}^v \sum_{r=0}^{k-1} l_{1,r} l_{2,k-1} \eta_1 + \sum_{r=0}^{v-1} l_{1,r} \eta_2$$

$$/4.89/ \quad \vartheta_2 > \sum_{k=1}^{v-1} \sum_{r=0}^{k-1} l_{2,r} l_{1,k} \eta_2 + \sum_{r=0}^{v-1} l_{2,r} \eta_1$$

egyenlőtlenségek adódnak.

A /4.88/ és /4.89/ relációkban $>$ jel helyett \geq érvényes csupán a $v=1$ esetén. $v=1$ mellett azonban

$$/4.88'/ \quad \vartheta_1 = \ell_{1,0} \ell_{2,0} \eta_1 + \ell_{1,0} \eta_2$$

$$/4.89'/ \quad \vartheta_2 = \ell_{2,0} \eta_1$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$/4.90/ \quad \vartheta_{1,1} = \vartheta_{2,1} = 0, \text{ vagy } \vartheta_i = 0, \quad i=1 \text{ illetve } i=2.$$

Az utóbbi esetekben természetesen $\ell_{i,0}=0$, $i=1$ ill. 2. Ha azonban a /4.90/ feltételek teljesülnek, akkor $v \leq 1$ is biztosan igaz. Vagyis a /4.88/ és /4.89/ teljesülésének feltétele az, hogy /4.90/ ne legyen igaz.

Vegyük észre, hogy /4.89/-ben $\ell_{1,0}$ hányados nem szerepel.

Tegyük fel, hogy a $Q \in \mathbb{Q}$ konfigurációra egyszer alkalmazzuk a \mathcal{D} operátort, amely generálja az $\ell_{i,0}$, $i=1,2$, hányadosokat és $Q_1 = \mathcal{D}Q$ konfigurációt. Ekkor a /4.90/ feltétel már ellenőrizhető. Ha $\ell_{1,0} + \ell_{2,0} > 0$, akkor $v \geq 1$. Ha a /4.90/ nem teljesül, akkor a /4.88/ és /4.89/ igazak. A $v \geq 1$ \mathcal{D} -összetettségi fokra ezekből különféle felső becsléseket nyerhetünk. Mindenesetre $v=1$ mellett, ha /4.90/ nem teljesül, akkor

$$/4.91/ \quad \begin{aligned} \vartheta_1 &> \ell_{1,0} \ell_{2,0} \eta_1 + \ell_{1,0} \eta_2 \\ \vartheta_2 &> \ell_{2,0} \eta_1. \end{aligned}$$

$v \geq 2$ mellett /4.88/ és /4.89/-ben $\ell_{i,k} \geq 1$, $1 \leq k \leq v-2$, $\ell_{1,v-1} \geq 1$, $\ell_{2,v-1} \geq 0$ becsléseket használva

$$/4.92/ \quad \vartheta_1 > \ell_{1,0} \ell_{2,0} \eta_1 + \sum_{k=2}^{v-1} (\ell_{1,0} + k - 1) \eta_1 + (\ell_{1,0} + v - 1) \eta_2$$

$$/4.93/ \quad \vartheta_2 > \ell_{2,0} \eta_2 + \sum_{k=2}^{v-1} (\ell_{2,0} + k - 1) \eta_2 + (\ell_{2,0} + v - 1) \eta_1$$

azaz

$$/4.92'/ \quad \vartheta_1 > \left(\ell_{1,0} (\ell_{2,0} + v - 2) + \frac{(v-2)(v-1)}{2} \right) \eta_1 + (\ell_{1,0} + v - 1) \eta_2$$

$$/4.93'/ \quad \vartheta_2 > (\ell_{2,0} + v - 1) \eta_1 + \left(\ell_{2,0} (v - 1) + \frac{(v-2)(v-1)}{2} \right) \eta_2$$

Ezek kvadratikus egyenlőtlenségek v -re. A /4.92'/ egyenlőtlenséget $v-1$ -re és a /4.93'/ egyenlőtlenséget $v-1$ -re megoldva, azokból

$$/4.94/ \quad v < \frac{1}{2} - \frac{\eta_2}{\eta_1} - \ell_{1,0} + \sqrt{(\ell_{1,0} - \ell_{2,0} + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\eta_2}{\eta_1} - \frac{1}{2})^2 - \frac{-(\ell_{2,0} - \frac{1}{2})^2 + \frac{\eta_1^2}{2}}{\eta_1}}$$

$$/4.95/ \quad v < \frac{1}{2} - \frac{\eta_1}{\eta_2} - \ell_{2,0} + 1 + \sqrt{(\ell_{2,0} - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\eta_1}{\eta_2} - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + \frac{2\eta_2}{\eta_2}}$$

Ha /4.94/-ben $\ell_{2,0}=1$ értéket helyettesítünk, vagy a /4.92'/-ben $\ell_{2,0} \geq 1$ becslést alkalmazunk, akkor a nyert

$$/4.94'/ \quad v < \frac{1}{2} - \frac{\eta_2}{\eta_1} - \ell_{1,0} + \sqrt{(\ell_{1,0} - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\eta_2}{\eta_1} - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + \frac{2\eta_1}{\eta_1}}$$

egyenlőtlenség hasonló a /4.95/-höz, csupán az 1 és 2 indexek vannak felcserélve.

Ha a /4.94/ vagy /4.94'/-ben az $\ell_{1,0}=1$ értéket vesszük, vagy a /4.92'/-ben az $\ell_{1,0} \geq 0$ becslést alkalmazuk, akkor

$$/4.96/ \quad \gamma < \frac{1}{2} - \frac{\eta_2}{\eta_1} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2 + \frac{2\eta_1}{\eta_1}} = \alpha_1 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\eta_1}{\eta_1^2}}\right),$$

$$\text{ahol } \alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{\eta_2}{\eta_1},$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ha a /4.95/-ben az $\ell_{2,0}=1$ értéket vesszük, vagy a /4.93'/-ban az $\ell_{2,0} \geq 1$ becslést használjuk, akkor a

$$/4.97/ \quad \gamma < \frac{1}{2} - \frac{\eta_1}{\eta_2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 + \frac{2\eta_2}{\eta_2}} = \alpha_2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\eta_2}{\eta_2^2}}\right),$$

$$\text{ahol } \alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{\eta_1}{\eta_2},$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

A /4.94/ , /4.95/ és /4.94'/ becsléseket $\ell_{i,0}$ ismeretében alkalmazhatjuk. Természetesen a becslés annál pontosabb, minél több információt használ fel. Ha $\ell_{i,0}$ értékeket nem használjuk fel, akkor a /4.96/ és /4.97/ becsléseket nyerjük. Hogy a /4.95/ és /4.94'/ és a /4.96/ és /4.97/ becslések közül melyik pontosabb az a paraméterektől függ.

A /4.94/ - /4.97/ becslések esetenként igen durvák lehetnek, hiszen a $\eta_{i,k}=0$ és $\ell_{i,k}=1$ becslések igen durvák lehetnek. Ezeknél egyszerűbb becsléseket kaphatunk a /4.84/ és /4.85/ összefüggésekből, ha a /4.92/ és /4.93/ becslések tagjait egy-két utolsó kivételével elhagyjuk. Az így nyert becslések természetesen általában még pontatlabbak lesznek, de adott esetben gyorsan szolgáltatnak felső korlátot a \mathcal{D} -Algoritmus számításigényére.

A /4.92/ és /4.93/-ban csak az utolsó tagokat figyelembe véve

$$/4.98/ \quad \gamma < 1 + \frac{\eta_1}{\eta_2} - \ell_{1,0} \quad / \text{ha } \eta_2 > 0 / ,$$

$$/4.99/ \quad \gamma < 1 + \frac{\eta_2}{\eta_1} - \ell_{2,0} \quad / \text{ha } \eta_1 > 0 / .$$

Az utolsó két-két tag figyelembevételével

$$/4.100/ \quad \nu < 2 + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta} - \ell_{1,0}, \quad / \eta > 0 /,$$

$$/4.101/ \quad \nu < 2 + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta} - \ell_{2,0}, \quad / \eta > 0 /.$$

E becslések egymáshoz való viszonya ismét a paraméterektől függ, de $\eta_1 \eta_2 > 0$ esetén természetesen a /4.100/ és /4.101/ "egyenletesen pontosabbak", mint a /4.98/ illetve /4.99/.

Összes eddigi becsléseinknél pontosabbat nyerhetünk a /4.32/ összefüggés alapján, ha azt $k=\nu$ -re felírva a $\eta_{i,\nu} \geq 0$ becslést alkalmazzuk és a \underline{D} mátrix elemeit a Fibonacci-féle számok segítségével becsüljük. Ekkor a $\eta_{i,k}=0, k < \nu$ "elhanyagolások" a becslés pontosságát nem rontják. Becslésünk alapja a következő lemma.

4.11. Lemma: A \mathcal{D} -redukció generálta

$$(A): \quad A_{-2}, A_{-1}, A_0, \dots, A_{2\nu-1}$$

$$(B): \quad B_{-2}, B_{-1}, B_0, \dots, B_{2\nu-1}$$

sorozatok és a Fibonacci-féle számok

$$(F): \quad F_0, F_1, F_2, \dots$$

sorozata között érvényesek az alábbi relációk:

$$/4.102/ \quad A_k \geq F_k, \quad B_k \geq F_{k+1}, \quad 0 \leq k \leq 2\nu-2, \quad \nu > 1$$

$$/4.103/ \quad A_k \geq F_{k+2}, \quad -2 \leq k \leq 2\nu-2, \quad \text{ha } \ell_{1,0} > 0.$$

$$/4.104/ \quad \text{A fenti relációk igazak } k=2\nu-1 \text{ mellett is, ha } \ell_{2,\nu-1} > 0.$$

A Fibonacci számok definíciója

$$/4.105/ \quad F_0=0, \quad F_1=1, \quad F_k=F_{k-1}+F_{k-2}, \quad k=2,3,\dots$$

Bizonyítás: Teljes indukcióval bizonyítunk a /4.81/ becslések figyelembevételével a /4.24/ deficiókban.

$$A_0 = \ell_{1,0} \geq 0 = F_0, \quad A_1 = \ell_{2,0} \ell_{1,0} + 1 \geq 1 = F_1$$

bármely $v \geq 0$ esetén igaz.

$$B_0 = 1 \geq F_1, \quad B_1 = \ell_{2,0} \geq 1 = F_2,$$

ha $v \geq 2$. $v > 1$ esetén $1 \leq k \leq v-1$ mellett a 4.5. Lemma szerint $\ell_{i,k} \geq 1$. Ha ℓ_k az (ℓ) sorozat k -adik tagja, akkor az indukciós lépés $k \geq 2$ -re

$$A_k = \ell_k A_{k-1} + A_{k-2} \geq A_{k-1} + A_{k-2} \geq F_{k-1} + F_{k-2} = F_k$$

$$B_k = \ell_k B_{k-1} + B_{k-2} \geq B_{k-1} + B_{k-2} \geq F_k + F_{k-1} = F_{k+1}.$$

Ha $\ell_{2,v-1} > 0$, akkor ez még $k=2v-1$ esetén is érvényes.

Ha $\ell_{1,0} > 0$, akkor $A_{-2}=0 \geq F_0$, $A_{-1}=1 \geq F_1$ és $k \geq 0$ -ra

$$A_k = \ell_k A_{k-1} + A_{k-2} \geq A_{k-1} + A_{k-2} \geq F_{k+1} + F_k = F_{k+2}$$

az indukciós lépés, amely $\ell_{2,v-1} > 0$ esetén $k=2v-1$ mellett is érvényes.

Q.e.d.

Megjegyzés: $\ell_{2,v-1} \geq 0$ értékétől függetlenül

/4.106/ $A_{2v-1} \geq F_{2v-3}$, $B_{2v-1} \geq F_{2v-2}$, ha $v > 1$,
és

/4.107/ $A_{2v-1} \geq F_{2v-1}$, $A_{2v-2} \geq F_{2v}$, ha $\ell_{1,0} > 0$,
becslések teljesülnek a 4.11. Lemma kiegészítése-
képpen.

A /4.32/ összefüggésekből

/4.108/ $\tau_{1,0} = A_{2v-1} \tau_{1,v} + A_{2v-2} \tau_{2,v}$,
 $\tau_{2,0} = B_{2v-1} \tau_{1,v} + B_{2v-2} \tau_{2,v}$.

A /4.102/ - /4.107/ alapján ezekből

/4.109/ $\tau_1 \geq F_{2v-3} \eta_1 + F_{2v-2} \eta_2$ ha $v > 1$
 $\tau_2 \geq F_{2v-2} \eta_1 + F_{2v-1} \eta_2$,

/4.109'/ $\tau_1 \geq F_{2v-1} \eta_1 + F_{2v} \eta_2$, ha $\ell_{1,0} > 0$.

Az $\ell_{2,v-1} > 0$ feltételt nem vizsgáljuk, minthogy ellenőrzése a \mathcal{D} -redukció tényleges elvégzése nélkül lehetetlen, márpedig v becslése csak a redukció előtt merülhet fel.

A /109/ és /109'/ becslésekből v -re becslést az F_k Fibonacci-féle számok becslésével nyerhetünk.
Könnyű igazolni, hogy

/4.110/ $F_5 = 5$ és $F_k > k$, $k \geq 6$.

Ezt a becslést használva /4.109/-ből

$$/4.111/ \quad \nu < \frac{\eta_1 + \tau_1}{2\eta}, \quad \text{ha } \ell_{1,0} > 0, \quad \nu \geq 2,$$

becsléshez jutunk. A /4.109/-ből bármely $\ell_{1,0} \geq 0$ mellett érvényes

$$\nu < 1 + \frac{\tau_1 + \eta_1}{2\eta}, \quad \text{ha } \nu \geq 4$$

$$\nu < 1 + \frac{\mathfrak{J}_2}{2\eta}, \quad \text{ha } \nu \geq 4$$

egyenlőtlenségeket és ezekből

$$/4.112/ \quad \nu < 1 + \frac{\min/\tau_1 + \eta_1, \mathfrak{J}_2/}{2\eta}, \quad \text{ha } \nu \geq 4,$$

becslést nyerjük.

A /4.111/ és /4.112/ becslések egyszerűbbek a /4.94/-/4.97/ becsléseknél. Ennek ellenére általában pontosabbak. Még pontosabb becslések nyerhetők a Fibonacci-féle számok /4.110/-nél pontosabb becslésével. Ismeretes [K10] a Fibonacci-féle számok

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^k - \hat{\phi}^k), \quad k \geq 0$$

zárt előállítás, ahol

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62 \quad \text{és} \quad \hat{\phi} = 1-\phi \approx -0.62$$

az

$$X^2 = X + 1$$

egyenlet két megoldása.

A $\hat{\phi}^k / \sqrt{5}$ mindig elegendően kicsi ahhoz, hogy fennálljon

$$/4.113/ \quad F_k = \lfloor \phi^k / \sqrt{5} \rfloor, \quad k \geq 0,$$

ahol $\lfloor X \rfloor$ az X -hez legközelebbi egész $[K10]$.
Ennél jobban használható a

$$/4.114/ \quad \phi^{k-2} \leq F_k \leq \phi^{k-1}, \quad k > 0,$$

egyenlőtlenség $[K10]$, amely teljes indukcióval könnyen bizonyítható.

A $/4.114/$ egyenlőtlenség alapján $/4.109'/-$ ből

$$/4.115/ \quad v \leq \frac{3}{2} + \frac{\lg \tau_1 - \lg(\gamma_1 + \phi \gamma_2)}{2 \lg \phi}, \quad \text{ha } v \geq 1, \ell_{1,0} > 0,$$

becslés nyerhető. A $/4.109/-$ ből a

$$v \leq \frac{5}{2} + \frac{\lg \tau_1 - \lg(\gamma_1 + \phi \gamma_2)}{2 \lg \phi}, \quad \text{ha } v \geq 2,$$

$$v \leq 2 + \frac{\lg \tau_2 - \lg(\gamma_1 + \phi \gamma_2)}{2 \lg \phi}, \quad \text{ha } v \geq 2,$$

amelyekből azután a

$$/4.116/ \quad v \leq 2 + \frac{\lg \tau_1 - \lg(\gamma_1 + \phi \gamma_2)}{2 \lg \phi} + \frac{\lg \min/\phi, \tau_2/\tau_1/}{2 \lg \phi}, \quad v \geq 2,$$

becslést nyerhetjük.

Ha a /4.113/ összefüggés alapján az

$$F_k \approx \Phi^k / \sqrt{5} \quad , \quad k \geq 0 \quad ,$$

közelítést használjuk, akkor egyszerűen nyerhető
a

$$/4.117/ \quad v \leq \bar{v} - 1 + \frac{\lg \sqrt{5}}{2 \lg \Phi} < \bar{v}$$

becslést nyerhetjük, ahol \bar{v} a /4.115/ és /4.116/ jobboldalai $\ell_{1,0}$ értékétől függően.

Az utóbbi /4.115/-/4.117/ becslések eléggé pontosak olyan értelemben, hogy az $\ell_k > 0$ -nak feltételezett hányadosokat (ℓ) -ben 1-nek, az $\ell_k \geq 0$ -nak feltételezetteket 0-nak megadva egy $Q_v = / \eta_1; 0; \eta_2; 0 /$ redukált konfigurációból megkonstruálhatunk olyan $Q = Q_0$ konfigurációt, amelyre a becslések pontosak és nem javíthatók $/ \bar{v} - 1 < v /$.

A \mathcal{D} -Algoritmus számítási igénye közelítően arányos a v \mathcal{D} -összetettségi fokkal, hiszen a 2. és 3. Lépések éppen v -ször ismétlődnek. A v -vel együtt tehát az algoritmus időigényét is becsültük.

A Δ -Algoritmuson alapuló alternatív értékelési lehetőség számításigényét a Δ -Algoritmus igénye határozza meg. Ennek részletes becslésével nem foglalkozunk. Nyilvánvalóan az euklideszi algoritmus időigényére vonatkozóan ismeretes becsléseket [K10] erre a célra használni lehetne. Ehelyett azonban inkább a \mathcal{D} -redukció és a lánc törtfejtés algoritmusai közötti kapcsolattal foglalkozunk a következő pontban.

Annyit azonban érdemes megjegyeznünk, hogy a Δ -Algoritmusz számításigénye arányos az 1. és 2. Lépések ismétlésének m számával. Mindaddig, amíg a lépések ismétlődnek, addig a lánc törtfejtés B_v közelítő nevezője monoton nő $B_0=1$ értékről. Az ismétlődés $B_m \geq U$ esetén ér véget, ezért $m \leq [U] = [1/\alpha]$ biztosan teljesül. Valójában azonban a B_v sorozat legalább olyan gyorsan nő, mint a Fibonacci-féle F_v számok, amelyek a /4.113/ formula szerint aszimptotikusan exponenciálisan nőnek.

A /4.113/ alapján az

$$/4.118/ \quad m \lesssim \frac{\lg U \sqrt{5}}{\lg \phi} = \frac{\lg \sqrt{5} \tau_2 - \lg \eta}{\lg \phi}$$

becslés nyerhető. E becslés pontosságával és javításának kérdésével nem foglalkozunk.

4.5. A \mathcal{D}_i -redukciók és a lánc törtfejtés kapcsolata.

A job-folyam párok összefüggő ütemtervei értékelésére szolgáló \mathcal{D} -redukciós módszer szoros kapcsolatban áll a lánc törtfejtés algoritmusával, amint azt már a 4.7. Lemma is mutatja. A 4.7. Lemma elsősorban a két algoritmus által generált mennyiségek analógiáját mutatja meg, nem azok összefüggését.

Hogy a \mathcal{D} -redukció a lánc törtfejtés bizonyos általánosítása az nyilvánvaló, ha a

$$\tau_i = \eta_i + \vartheta_i, \quad i=1,2,$$

összegekben a $0 \leq \eta_i \leq \tau_i$ komponenseket változó paramétereknek tekintjük. Ekkor az $\eta_i=0$, $i=1,2$, speciális értéknél a \mathcal{D} -redukció ekvivalenssé válik a $\xi_0 = \tau_1 / \tau_2$ szám lánc törtfejtésének algoritmusával. Ekkor az

$$(l) : l_{1,0}, l_{2,0}, l_{1,1}, l_{2,1}, \dots$$

$$(b) : b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$$

sorozatok azonossá válnak. $\eta > 0$ esetén is lehetséges azonban a $\xi_0 = \tau_1 / \tau_2$ szám lánc törtfejtése tekintet nélkül a $\tau_i = \eta_i + \vartheta_i$ felbontásra. Ekkor az (l) és (b) sorozatok már nem lesznek feltétlenül azonosak. Az alábbiakban a \mathcal{D} -redukció és a lánc törtfejtés generálta mennyiségek kapcsolatát vizsgáljuk beleértve az (l) és (b) sorozatok kapcsolatát is.

Ha

$$(x): x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$$

egy végtelen sorozat, akkor legyen $|(x)|$ a sorozat utolsó 0-tól különböző tagjának a sorszáma, ami a rákövetkező 0 értékű tag indexe. Vagyis $|(x)|=m$, ha $x_{m-1} \neq 0$, de $x_k = 0$, $k \geq m$. $|(x)|=m$ egészet az (x) sorozat hosszának nevezzük. Ha bármilyen nagy indexű tag után van $x_k \neq 0$ tag a sorozatban, akkor $|(x)| = \infty$. Legyen (0) az a sorozat, amelynek minden tagja 0.

$|(0)| = 0$ és ez kizárólag a (0) sorozat sajátossága.

Mivel a 2.Fejezetben egy ξ_0 szám lánc törtfejtésénél és e Fejezetben a \mathcal{D} -redukciónál használtunk azonos jelöléseket különböző mennyiségekre, ilyen x jelölést \hat{x} jelölésre változtattunk a lánc törtfejtésnél.

Legyen $Q_0 \doteq Q \in \mathcal{Q}$ egy tetszőleges nem-degenerált konfiguráció. Legyen

$$/4.119/ \quad \hat{\xi}_0 = \xi_0 = \frac{\tau_{1,0}}{\tau_{2,0}} > 0.$$

Legyen $(\hat{\xi})$ a $\hat{\xi}_0$ lánc törtfejtésével generált teljes hányadosok, (b) a nem-teljes hányadosok, (\hat{A}) , (\hat{B}) és $(\hat{\omega})$ az $\hat{\omega}_n \doteq \hat{B}_n$, \hat{A}_n vektorok sorozata. Ha valamely tag nincs definiálva, annak értékét 0-nak tekintjük. Legyen

$$N = |(b)|, \quad 0 \leq N \leq \infty$$

a (b) sorozat hossza, a $\hat{\xi}_0$ lánc törtfejtésében a tagok száma. Legyen $n=N-1$. Véges N esetén n az utolsó b_n résznevező indexe.

Legyen (ξ) a /4.25/ szerint definiált ξ_k hányadosok sorozata, amelyet a \mathcal{D} -redukció generál.

Legyen

$$m = |(\ell)|, \quad 0 \leq m \leq \infty$$

az (ℓ) hányados-sorozat hossza. A Q_0 konfiguráció $\forall \mathcal{D}$ -összetettségi foka ekkor

$$/4.120/ \quad \forall = \left[\frac{m+1}{2} \right].$$

Az (A) , (B) és (ω) sorozatokat a /4.24/ definiálja. Célszerű bevezetnünk az (η) , (ϑ) , (τ) sorozatokat is az

$$/4.121/ \quad \begin{aligned} \eta_{2k} &= \eta_1, \quad \vartheta_{2k} = \vartheta_{1,k}, \quad \tau_{2k} = \tau_{1,k} \\ \eta_{2k+1} &= \eta_2, \quad \vartheta_{2k+1} = \vartheta_{2,k}, \quad \tau_{2k+1} = \tau_{2,k} \end{aligned} \quad k=0,1,\dots$$

definícióval. A /4.21/ definíciók szerint ekkor

$$/4.122/ \quad \vartheta_n = \ell_n \tau_{n+1} + \vartheta_{n+2}, \quad \tau_n = \ell_n \tau_{n+1} + \tau_{n+2}.$$

A /4.121/ jelölésekkel a /4.25/ definíció

$$/4.123/ \quad \xi_k = \frac{\tau_k}{\tau_{k+1}}, \quad 0 \leq k \leq 2\forall - 1$$

alakba írható.

Hangsúlyozzuk, hogy n akkor és csak akkor véges, ha $\hat{\xi}_0 \doteq \xi_0$ racionális és m akkor és csak akkor végtelen, ha $\eta=0$ és $\hat{\xi}_0 \doteq \xi_0$ irracionális. Ekkor n is végtelen.

A lánc törtfejtés definíciójából

$$b_k = \left[\hat{\xi}_k \right] \quad \text{egész, } 0 \leq k < N, \\ /4.124/ \quad \hat{\xi}_{k+1} = \frac{1}{\{\hat{\xi}_k\}} = \frac{1}{\hat{\xi}_k - b_k}, \quad 0 \leq k < n,$$

$$b_0 \geq 0, \quad b_k \geq 1, \quad 1 \leq k < N, \quad b_n \geq 2, \quad \text{ha } N \text{ véges,}$$

$$/4.125/ \quad 0 < \frac{1}{\hat{\xi}_k} < 1, \quad 1 \leq k < N.$$

A \mathcal{D} -redukció definíciójából

$$l_k = \left[\frac{\mathcal{J}_k}{\tau_{k+1}} \right] \quad \text{egész, } 0 \leq k \leq 2v-1, \\ /4.126/ \quad \xi_{k+1} = \frac{1}{\xi_k - l_k}, \quad 0 \leq k < m,$$

$$l_0 \geq 0, \quad l_k \geq 1, \quad 1 \leq k \leq 2v-2, \quad l_{2v-1} \geq 0,$$

$$/4.127/ \quad 0 < \frac{\mathcal{J}_{k+2}}{\tau_{k+1}} < 1, \quad 0 \leq k \leq 2v-1.$$

Ezekután egy lemmát bizonyítunk, amelynek lényege az, hogy az (l) sorozat általában rövidebb a (b) sorozatnál, de legfeljebb eggyel hosszabb.

4.12. Lemma: Bármely $Q \in \mathbb{Q}$ nem-degenerált

$/Q^{(i)} \neq 0, i=1,2/$ konfiguráció esetén a /4.119/ alatti $\hat{\xi}_0 \doteq \xi_0$ szám lánc törtfejtésével, valamint a Q konfiguráció \mathcal{D} -redukciójával generált mennyiségek közötti kapcsolatokra nézve igazak az alábbi állítások:

/A/ Létezik egy legnagyobb /nem feltétlenül véges/
 $0 \leq s \leq n$ egész úgy, hogy

$$/4.128/ \quad \xi_k = \hat{\xi}_k, \quad 0 \leq k \leq s$$

és $s \geq 1$ esetén

$$/4.129/ \quad \ell_k = b_k, \quad 0 \leq k \leq s-1;$$

/B/ A fenti s egészre vonatkozóan igazak:

/i/ Ha $s = \infty$, akkor $n = \nu = \infty$ és $(\ell) = (b)$; ez akkor és csak akkor igaz, ha $\eta = 0$, $\hat{\xi}_0$ irracionális;

/ii/ Ha $s < \infty$ / $s \leq n$ automatikusan fennáll!/, akkor

$$/4.130/ \quad \ell_s \leq b_s, \quad \ell_{s+1} \leq 1, \quad \ell_{s+k} = 0, \quad k > 1;$$

ez akkor és csak akkor igaz, ha $\nu < \infty$;

/C/ $(\ell) = (b)$ akkor és csak akkor, ha

$$/4.131/ \quad \xi_{s+1} \leq 1;$$

/D/ A /B/ii/ esetben

/i/ $\ell_s = b_s$ akkor és csak akkor, ha

$s = n$, $\xi_n > 1$ egész, páros n esetén $\eta_1 = 0$, páratlan n esetén $\eta_2 = 0$ / $n = \infty$ esetén $\eta = 0$ /;

ebben az esetben

$$\ell_n = b_n, \ell_{n+1} = 0, (\ell) = (b), m = N, \tau_{n+2} = 0;$$

/ii/ $\ell_s < b_s, \ell_{s+1} > 0$ akkor és csak akkor, ha $s = n < \infty, \xi_{n+1} = 1$ és $\eta_1 \eta_2 = 0$, de páros n esetén $\eta_1 > 0$, páratlan n esetén $\eta_2 > 0$;

ebben az esetben

$$\ell_n = b_{n-1}, \ell_{n+1} = 1, |(\ell)| > |(b)|, m = N+1, \tau_{n+3} = 0;$$

/iii/ $\ell_s < b_s, \ell_{s+1} = 0$ minden egyéb esetben: ha $s < n$, vagy $s = n < \infty, \xi_{n+1} = 1, \eta_1 \eta_2 > 0$, vagy $s = n < \infty, \xi_{n+1} < 1$;

• ebben az esetben

$$q = b_s - \ell_s > 0, (\ell) \neq (b), |(\ell)| \leq |(b)|, m = s+1, \eta > 0,$$

$\eta_1 = 0$ esetén s nem lehet páros,

$\eta_2 = 0$ esetén s nem lehet páratlan.

Bizonyítás: Az /A/ állítás /4.128/ része következik a /4.119/-ből, a /4.129/ része pedig a /4.128/-ből és a /4.124/ és /4.126/ összefüggésekből. Vagyis /A/ bizonyítva van. $s = \infty$ esetén triviálisan $n = v = \infty$ és $(\ell) = (b)$. A 4.6. Lemma szerint viszont $v = \infty$ pontosan a /4.3/ különleges esetben áll fenn, amikor $\eta = 0$ és $\hat{\xi}_0$ irracionális. Ezzel igazoltuk /B/i/ állításunkat. További állításaink $s < \infty$ esetre vonatkoznak. $s < \infty$ a /B/i/ és a 4.6. Lemma szerint pontosan akkor teljesül, ha $v < \infty$. A /4.130/ következménye a /D/ állításoknak, kivéve az $\ell_{s+k} = 0, k > 1$ állítást.

Ez utóbbit is /D/-vel együtt bizonyítjuk.

$s < \infty$ mellett $s \leq n$ definíció szerint. A /4.124/ és a /4.126/ kifejezésekből a /4.128/ felhasználásával

$$b_s \doteq [\hat{\xi}_s] = [\xi_s] \doteq [\tau_s / \tau_{s+1}] \geq [\eta_s / \tau_{s+1}] \doteq l_s,$$

vagyis

$$l_s \leq b_s.$$

Tegyük fel, hogy $s < n$. Az $l_s = b_s$ egyenlőségből a /4.124/ és /4.126/ szerint $\hat{\xi}_{s+1} = \xi_{s+1}$ következik, az s definíciójával ellentmondásban. Ekkor tehát

$$l_s < b_s, \text{ ha } s < n,$$

ami összhangban áll a /D/iii/ állítással. Ez azonban csak $\eta_s < \tau_s$, azaz $\eta_s > 0$ esetén lehet, tehát páros s esetén $\eta_1 > 0$, páratlan s esetén $\eta_2 > 0$, de mindegyik esetben $\eta > 0$, feltétlenül fenn kell álljon, összhangban /D/iii/ állításunkkal. $l_s < b_s$ esetén $l_s \leq b_s - 1$, amelyet felhasználva a /4.125/ figyelembevételével a /4.126/-ból

$$\frac{1}{\xi_{s+1}} = \xi_s - b_s \geq \hat{\xi}_s - b_{s+1} = 1 + \frac{1}{\hat{\xi}_{s+1}} > 1,$$

ami bizonyítja a /C/ állítást $s < n$ mellett. Ugyanakkor ebből $\eta_{s+1} \leq \tau_{s+1} < \tau_{s+2}$, ezért $l_{s+1} = 0$ és a 4.5. Lemma szerint $l_{s+k} = 0$, $k > 1$. Ez bizonyítja /D/iii/ és /B/ii/ állításunkat $s < n$ esetben.

Legyen most $s = n < \infty$. Ekkor $\hat{\xi}_0$ racionális és

$$\tau_n / \tau_{n+1} \doteq \xi_n \doteq \hat{\xi}_n = b_n \geq 2,$$

amiből

$$\tau_n = b_n \tau_{n+1}.$$

Ugyanakkor a /4.123/-ből

$$\tau_n = l_n \tau_{n+1} + \tau_{n+2}.$$

E két egyenlőségéből $q \doteq b_n - l_n$ definícióval

$$\tau_{n+2} = q \tau_{n+1}.$$

Mivel $\tau_{n+1} \neq 0$, az l_n hányados /4.21/ alatti definíciója szerint $\vartheta_{n+2} < \tau_{n+1}$, ezért $q > 0$ kizárólag $\eta_{n+2} = \eta_n > 0$ esetén lehetséges. Vagyis $s=n$ mellett $l_n < b_n$ szükséges feltétele páros n esetén $\eta_1 > 0$, páratlan n esetén $\eta_2 > 0$, összhangban a /D/ii/ és /D/iii/ állításokkal.

$q=0$, azaz $l_n = b_n$ pontosan akkor, ha $\tau_{n+2}=0$, vagyis $\eta_n=0$ és $\vartheta_n/\tau_{n+1} = \xi_n \geq 2$ egész.

$\eta_n = \eta_1$, ha n páros és $\eta_n = \eta_2$, ha n páratlan. Mivel $\tau_{n+2}=0$, ezért $l_{n+1}=0$, és így $l_{n+k}=0$, $k>1$, teljesülnek. Ekkor $(l) = (b)$ és $m=N$ következik.

Ezzel bizonyítva van a /D/i/ állítás, valamint a /B/ii/ állítás.

$q \geq 1$ esetén viszont a $\vartheta_{n+1} \leq \tau_{n+1} \leq q \tau_{n+1} = \tau_{n+2}$ egyenlőtlenségsorból $\vartheta_{n+1} \leq \tau_{n+2}$ adódik. Ezért az $l_{n+1} > 0$ kizárólag $l_{n+1}=1$ lehet akkor, ha $\eta_{n+1}=0$ és $q=1$. Ekkor $l_n = b_n - 1$, $l_{n+1}=1$, $|(l)| > |(b)|$, $\eta_1 \eta_2 = 0$ és $\xi_{n+1}=1$ a /D/ii/ állításnak megfelelően. $l_n < b_n$ természetesen csak $\eta_n > 0$ mellett lehetséges. $\eta_{n+1}=0$, $\vartheta_{n+1} = \tau_{n+2}$ következtében $\tau_{n+3}=0$ és ezért $l_{n+2}=0$ és $l_{n+k}=0$, $k>1$. Ezért $m=N+1$. Ezzel teljesen bizonyítottuk a /D/ii/ állítást, valamint a /B/ii/ állítást.

$\xi_{n+1}=1$ igazolja a /C/ állítást is erre az esetre.

Ha akár $\eta_{n+1} > 0$, azaz $\eta_1 \eta_2 > 0$ és $q \geq 1$, akár $q > 1$ és $\eta_{n+1} \geq 0$, akkor $\eta_{n+1} < \tau_{n+2}$ teljesül és ezért $\ell_{n+1}=0$ és $\ell_{n+k}=0$, $k > 1$. $q \geq 1$ ekvivalens $\xi_{n+1} = \frac{\tau_{n+1}}{\tau_{n+2}} = \frac{1}{q} \leq 1$ feltétellel. Ez

igazolja a /D/iii/ állításunkat $s=n$ mellett, valamint a /B/ii/ és a /C/ állításokat a még hiányzó esetekre. Ezzel minden lehetséges változatot megvizsgáltunk és állításainkat ellenőriztük.

Q.e.d.

1. Megjegyzés: Érdekes kiemelni e lemma néhány nyilvánvaló korolláriumát.

Először is /4.128/ és /4.125/ következménye a

$$/4.132/ \quad 0 < \frac{1}{\xi_k} < 1, \quad 1 \leq k \leq s, \quad \text{ha } s > 0.$$

A /4.129/ és a /D/ állítások következményeként

$$/4.133/ \quad \sum_{k=0}^s \ell_k \leq \sum_{k=0}^s b_k, \quad \text{egyenlőség csak } (\ell) = (b) \text{ esetén,}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ell_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \text{egyenlőség csak } m \geq N \text{ esetén,}$$

$$\omega_k = \hat{\omega}_k, \quad 0 \leq k \leq s-1, \quad \text{ha } s > 0,$$

$$\omega_s = \hat{\omega}_s, \ell_s \leq \hat{\omega}_s, \quad \text{ha } \ell_s \leq b_s,$$

$$/4.134/ \quad \omega_{s+1} = \begin{cases} \hat{\omega}_s, \ell_{s+1} \leq \hat{\omega}_s, & \text{ha } \ell_{s+1} = 1 \\ \hat{\omega}_{s-1}, & \text{ha } \ell_{s+1} = 0. \end{cases}$$

A /C/ állítás következménye a /4.132/-vel együtt, hogy a

$$/4.135/ \quad \tau_{2,0} > \tau_{1,1} > \tau_{2,1} > \dots > \tau_{1,k} > \tau_{2,k} > \dots$$

egyenlőtlenségsorban az első s darab $>$ jel biztosan igaz; az $s+1$ -edik $>$ jel pontosan akkor igaz, ha $(\ell) = (b)$; $(\ell) \neq (b)$ esetben a $>$ jel helyett a /4.131/ alatti jel érvényes.

2. Megjegyzés: A 4.12. Lemmában a $(\tau) : \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ sorozat-jelölés nagymértékben egyszerűsítette a szövegezést és bizonyítást. E jelölés azonban megnehezíti az eredmények kapcsolását a korábbiakhoz. Az összekötő kapcsolat a /4.120/ és /4.121/ formulák. Ezek alapján a 4.6. Táblázat állítható össze m és n illetve s paritásától függően. Látjuk, hogy az (ℓ) sorozat $m=|(\ell)|$ hossza lényegében kétféle lehet: $m=s+1$ és $m=s+2$, az utóbbi csak $s=n$ esetben. Ez azt jelenti, hogy (ℓ) sorozatban az utolsó nem-nulla tag $\ell_s = \ell_{m-1}$, illetve $\ell_{s+1} = \ell_{m-1}$. Ugyanakkor az ℓ_{m-1} utolsó tag $\ell_{1,v-1}$ akkor, ha $m-1$ páros és $\ell_{2,v-1}$ akkor, ha $m-1$ páratlan. Mindenképpen $v-1 = \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$, amiből $v = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ a /4.120/-nak megfelelően. Ennek értékét tartalmazza a 4.6. Táblázat s értékétől és $m(s)$ függvénytől függően. A $v = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ -ből kifejezhető m a v segítségével az s paritásától /és közvetve m paritásától/ függően és $m(s)$ függvénytől függően /az m paritásától függő értéket $m(s)$ nem befolyásolja/. Ezt is tartalmazza a 4.6. Táblázat.

s	η_s	τ_s	$v = [(m+1)/2]$		$m(v)$		$m(v)$	$m(v)$ -1	m
			$m=s+1$	$m=s+2$	$m=s+1$	$m=s+2$			
páros	η_1	$\tau_{1, \frac{s}{2}}$	$\frac{s+1}{2}$	$\frac{s}{2}+1$	$2v-1$	$2v$	$2v$	$2v-1$	páros
páratlan	η_2	$\tau_{2, \frac{s-1}{2}}$	$\frac{s+1}{2}$	$\frac{s-1}{2}+1$	$2v$	$2v-1$	$2v-1$	$2v-2$	páratlan

4.6. Táblázat: Átszámítás a kétféle indexelés között.

A 4.2. pontban két operátort vezettünk be: a \mathcal{D}_1 és \mathcal{D}_2 operátorokat, amelyek közül a \mathcal{D}_1 operátort tárgyaltuk eddig \mathcal{D} -operátor néven. Megmutattuk, hogy a \mathcal{D}_2 -operátor alkalmazása egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációra ekvivalens a \mathcal{D} -operátor alkalmazásával a $\bar{Q} \in \mathcal{Q}$ konjugált konfigurációra és pontosan a $Q^{(1)}$ és $Q^{(2)}$ job-folyamok szerepcseréjét jelenti. A \mathcal{D} -operátor tárgyalása után ezért a \mathcal{D}_2 -operátor tárgyalására nincsen szükség. Minden \mathcal{D}_2 -vel kapcsolatos kérdést megválaszolhatunk a \mathcal{D} operátorral kapcsolatos tények alapján.

Igy a \mathcal{D}_2 -redukció és a lánc törtfejtés kapcsolatáról elmondhatjuk, hogy a \mathcal{D}_2 -redukció és a $\hat{\xi}_0 = \tau_2/\tau_1$ szám lánc törtfejtése generálta mennyiségek között ugyanaz a kapcsolat, mint a \mathcal{D} -redukció és a $\hat{\xi}_0 = \tau_1/\tau_2$ lánc törtfejtése generálta mennyiségek között. Vagyis a 4.12. Lemma alkalmazható úgy is, hogy $\hat{\xi}_0$ helyett a $\tau_2/\tau_1 = 1/\hat{\xi}_0$ lánc törtfejtése generálta mennyiségeket és a \mathcal{D}_2 -redukció generálta mennyiségeket használjuk.

Közismert a $\hat{\xi}_0$ és az $1/\hat{\xi}_0$ reciprok értékek lánctörtfejtése közötti kapcsolat, amelyet a következő tény határoz meg $\xi_0 > 0$ esetén:

a $b_0 = [\xi_0]$ és $\tilde{b}_0 = [\frac{1}{\xi_0}]$ első tagok közül pontosan az egyik pozitív, a másik 0, kivéve a

$\xi_0 = 1$ számot, amelynél mindkettő 1;

a $\xi_0 = b_0 + \frac{1}{\xi_1}$ és $\frac{1}{\xi_0} = \tilde{b}_0 + \frac{1}{\tilde{\xi}_1}$ definíciókból

$$\xi_1 = \frac{1}{\xi_0 - b_0} = \frac{1}{\xi_0}, \text{ ha } b_0 = 0$$

$$\tilde{\xi}_1 = \frac{1}{\frac{1}{\xi_0} - \tilde{b}_0} = \frac{\xi_0}{1 - \tilde{b}_0 \xi_0} = \xi_0, \text{ ha } \tilde{b}_0 = 0.$$

Ez ugyanis azt jelenti, hogy a $\xi_0 = [b_0, b_1, \dots]$ és a $\frac{1}{\xi_0} = [\tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \dots]$ lánctörtfejtés tagjai teljesen azonosak csupán valamelyik sorozatban egy 0 első elem előzi meg a másik sorozat tagjait. /A $\xi_0 = 1$ speciális esetben mindkét sorozat az 1 egyetlen egészre redukálódik/.

Teljesen analóg összefüggés van egy $Q \in \mathbb{Q}$ konfigurációra alkalmazott \mathcal{D}_1 - és \mathcal{D}_2 -redukciók generálta $(\ell^{[1]})$ és $(\ell^{[2]})$ hányados-sorozatok között is: valamelyik sorozat 0 taggal kezdődik, majd a másik sorozat tagjai következnek benne. Ez a tény következik a \mathcal{D}_i -redukciók definíciójából, amely a \mathcal{D}_i -operátor /4.17/ alatti definícióján alapszik.

A /4.17/ definíció szerint az $\ell^{[a]} > 0$ feltétele $\vartheta_a \geq \tau_{3-a}$ teljesülése. Ezért az $\ell^{[1]} > 0$ feltétele $\vartheta_1 \geq \tau_2$ és $\ell^{[2]} > 0$ feltétele $\vartheta_2 \geq \tau_1$. Azonban $\vartheta_1 \geq \tau_2$ esetén $\vartheta_2 \leq \tau_2 \leq \vartheta_1 \leq \tau_1$, ezért $\vartheta_2 \geq \tau_1$

kizárólag akkor teljesülhet, ha $\eta_2 = \eta_1 = 0$ és $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1$, vagyis $\hat{\xi}_0 = \frac{\tau_1}{\tau_2} = 1$. Vagyis az $(\ell^{[1]})$ és $(\ell^{[2]})$ sorozatok csak ebben a különleges esetben kezdődhetnek mindketten pozitív taggal, mégpedig ekkor mindkettő az egyetlen 1 első tagból áll. Egyéb esetekben $(\ell^{[1]})$ és $(\ell^{[2]})$ valamelyike 0-val kezdődik. $\ell_{a,0}^{[a]} = 0$ esetén azonban a τ_a nem változik, ezért az $\ell_{3-a,0}^{[a]}$ hányados ugyanaz lesz, mint az $\ell_{3-a,0}^{[3-a]}$ hányados. A további hányadosok a két sorozatban éppen ezért megegyeznek.

Vagyis a Q . konfiguráció \mathfrak{D}_1 - és \mathfrak{D}_2 -redukciója generálta $(\ell^{[1]})$, illetve $(\ell^{[2]})$ sorozatok azonosak, csupán valamelyik sorozatban egy 0 első elem előzi meg a másik sorozat tagjait.

/Az $\eta = 0$, $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$ speciális esetben mindkét sorozat az 1 első elemből áll/. Ez teljesen analóg a ξ_0 és $1/\xi_0$ lánc törtfejtésével generált (b) sorozatok viszonyával. Az $(\ell^{[i]})$, $i=1,2$, sorozatok egyszerre 0-ák, ha Q redukált konfiguráció.

Az $(\ell^{[1]})$ és $(\ell^{[2]})$ sorozatok ezen egyszerű viszonya határozza meg a többi, (ξ) , (A) , (B) , (ω) , stb. sorozatok viszonyát is és a Q \mathfrak{D}_1 -összetettségi fokainak viszonyát is. Nyilvánvaló például, hogy a $\sqrt{[1]}$ és $\sqrt{[2]}$ összetettségi fokok legfeljebb eggyel térhetnek el.

Bizonyítás nélkül közöljük a 4.7. Táblázatot a Q konfiguráció \mathfrak{D}_1 - és \mathfrak{D}_2 -redukciója generálta x és \bar{x} jellemzők között, ami nem egyéb mint a Q és \bar{Q} konjugált konfigurációk \mathfrak{D} -redukciója generálta jellemzők közötti összefüggés.

A 4.12. Lemma, a 4.5. Tétel és a 4.6. Tétel segítségével kapcsolatot lehet találni a Q konfiguráció KT ütemterveinek μ_1 és μ_2 ciklusszámait és a $\hat{\xi}_0 = \tau_1/\tau_2$ szám A_k , B_k közelítő számlálói és

$\ell_{1,0}$	$\bar{\nu}$		$\bar{\ell}_{2,0}$	$\bar{\ell}_{2,k}$	$\bar{\ell}_{1,k}$	$\bar{\ell}_{1,\bar{\nu}-1}$	
	$\ell_{2,\nu-1}>0$	$\ell_{2,\nu-1}=0$				$\ell_{2,\nu-1}>0$	$\ell_{2,\nu-1}=0$
>0	$\nu+1$	ν	0	$\ell_{2,k-1}$	$\ell_{1,k}$	0	$\ell_{1,\nu-1}$
$=0$	ν	$\nu-1$	$\ell_{2,0}$	$\ell_{2,k}$	$\ell_{1,k+1}$	0	$\ell_{1,\nu-1}$
Mgj.	-	-	-	$k \geq 1$	$k \geq 0$	-	-

$\bar{\tau}_{2,k}$	$\bar{\tau}_{1,k}$	$\bar{\xi}_k$	\bar{A}_k	\bar{B}_k	$\bar{A}_{2\bar{\nu}-2}$	$\bar{B}_{2\bar{\nu}-2}$	$\bar{A}_{2\bar{\nu}-1}$	$\bar{B}_{2\bar{\nu}-1}$
$\tau_{2,k-1}$	$\tau_{1,k}$	ξ_{k-1}	B_{k-1}	A_{k-1}	$B_{2\nu-1}$	$A_{2\nu-1}$	$B_{2\nu-2}$	$A_{2\nu-2}$
$\tau_{2,k}$	$\tau_{1,k+1}$	ξ_{k+1}	B_{k+1}	A_{k+1}	-	-	-	-
$k \geq 1$	$k \geq 0$	$k \geq 1$	$k \geq -1$	$k \geq -1$	-	-	-	-

Kivételek: /1/ $\nu=0$ esetén $\bar{\nu}=0$, $(\bar{\ell})=(0)$, $(\bar{\xi})=(\frac{1}{\xi_0})$, $(\bar{Q})=(Q)$,
 $(\bar{A})=(A)$, $(\bar{B})=(B)$

/2/ $\nu=1$ esetén $\ell_{1,0}=0$, $\ell_{2,\nu-1}=0$ mezők nincsenek értelmezve

/3/ $Q=0; \vartheta_0; 0; \vartheta_0/$, $\vartheta_0 > 0$, konfigurációnál
 $\bar{\ell}_{2,0}=\ell_{1,0}=1$, $\bar{\ell}_{1,0}=\ell_{2,0}=0$, $\nu=\bar{\nu}=1$.

4.7. Táblázat: A $\bar{D}=\bar{D}_1$ és $\bar{D}=\bar{D}_2$ -redukciók generálta mennyiségek összefüggése.

nevezői között. Kimutatható például, hogy racionális esetben, ha $\xi_0=P/Q$, akkor $\mu_1 \leq Q$ és $\mu_2 \leq Q$ és megadható az egyenlőség feltétele is. Ezzel a kérdéssel nem kívánunk foglalkozni.

5. Megszakító ütemezés

Ebben a fejezetben megszakításos /megszakító/ ütemezések problémáival foglalkozunk. Az ütemezés fogalmát a 3. Fejezetben definiáltuk és tisztáztuk számos általános tulajdonságát. Így a 3.2. Tétel szerint a gazdaságos /G-/ ütemtervek dominánsak. Ezek olyanok, amelyek szorosak és nincs "felesleges" megszakítás bennük. A 3.11. Lemma szerint minden G-ütemtervet meghatároznak a kritikus szituációkban hozott döntések /kritikus döntések/. A 3.5. Tétel szerint az első GT-kritikus szituációig az $\mathcal{R}^{(a)}$ osztály minden eleme azonos első határozott szakaszt tartalmaz. Megemlítjük, hogy az előző fejezetben tárgyalt összefüggő prioritásos ütemtervek speciális G-ütemtervek, amelyekben megszakítás nem lép fel. A 3.6. Tétel szerint a következő gazdaságos ütemtervek az $R_{i,3-i}$, $i=1,2$, /megszakító/ prioritásos ütemtervek. Sajnos ezek dominanciájának kérdését nem sikerül megválaszoznunk. Nem sikerül teljes általánosságban tisztáznunk az $R_{i,3-i}$ ütemtervek periodicitásának kérdését sem. Mindezek ellenére kizárólag a következő gazdaságos, vagyis az $R_{i,3-i}$, $i=1,2$, prioritásos ütemtervekkel foglalkozunk, amelyek gyakorlatilag legfontosabbak. Az ütemezés tényleges gyakorlatában ugyanis a prioritás szerinti megszakító ütemezés igen gyakran alkalmazott stratégia. Sztochasztikus esetben is leginkább ilyet vizsgálnak [A4], [T6] .

Az 5.1. pontban a Δ_i , $i=1,2$, operátorokat definiáljuk, amelyek segítségével Q konfigurációk egyszerűbben ütemezhető Q^* redukált konfigurációba transzformálhatók és $R_{i,3-i}(Q^*)$ jellemzőiből $R_{i,3-i}(Q)$ jellemzői meghatározhatók. A 4.1. pontban definiált Φ_i , $i=1,2$, operátorokhoz hasonlóan a Δ_i operátor ismételt alkalmazása is egy lánc tört-fejtés általánosításának tekinthető algoritmust jelent, amelynek analógiáit különféle összefüggések jól mutatják.

Az 5.9. Lemma a $Q_k = \Delta_1^k Q$, $k=0,1,\dots$ konfigurációk paramétereinek összefüggéseit mutatja meg.

Az 5.2. pontban a $\Delta \doteq \Delta_1$ operátor szerinti redukció hatását vizsgáljuk az $R_{12}(Q)$ ütemtervekre periodikus esetben. A periodicitás kérdését ez redukált konfigurációk ütemtervei periodicitásának kérdésére vezeti vissza.

A 5.3. pontban a Q konfigurációtér különféle részeire sikerül az $R_{12}(Q)$ ütemterv jellemzőit tisztázni. Lényegében csak azok a konfigurációk maradnak kérdésesek, amelyek redukálhatók, redukáljuk nem elfajult és $\tau_1^* < \tau_2^*$ teljesül.

Ezt az esetet, pontosabban az ilyen redukált konfigurációk $R_{12}(Q^*)$ ütemterveinek tulajdonságait vizsgáljuk az 5.4. pontban. A $\mathcal{J}_1^* \leq \mathcal{J}_2^*$ esetre sikerül bizonyítani a perioditást és a jellemzők meghatározása közelítési feladat megoldását igényli. Az itt definiált R_{12}^* -Algoritmus azonban bármely periodikus $R_{12}(Q^*)$ jellemzőit véges lépésben megadja. Nincs azonban szükséges kritériuma annak, hogy az algoritmus véges lépésben véget ér; csak elegendő kritériumok. Az algoritmus feltárja az $R_{12}(Q^*)$ ütemtervek struktúráját és lehetővé teszi a hatékonyság közelítését nem periodikus esetben is.

Általában az R_{12} ütemtervek hatékonyságának meghatározásával foglalkozunk az 5.5. pontban. Az R_{12}^* -Algoritmus felhasználásával bármely ütemterv hatékonysága becsülhető. Periodikus R_{12} ütemtervek hatékonysága természetesen pontosan meghatározható, miután ismerjük az ütemterv alapvető jellemzőit.

Az utolsó 5.6. pontban a Δ -redukció és \mathcal{D} -redukció kapcsolatát, majd pedig a Δ_1 - és a Δ_2 -redukciók kapcsolatát vizsgáljuk meg röviden.

5.1. A konfigurációk redukciói: Δ_i -redukciók

A 4.2. pontban definiált \mathfrak{D}_i operátorokhoz hasonlóan bevezetünk most két másik operátort, amelyeket Δ_i , $i=1,2$, jelöli. A Q konfigurációtér bármely

$$Q = / \eta_1; \vartheta_1; \eta_2; \vartheta_2 / \in Q$$

elemére alkalmazva a

$$\tilde{Q}^{[a]} = \Delta_a Q \in Q$$

olyan konfiguráció, amelynek

$$\tilde{Q}^{[a]} = / \tilde{\eta}_1^{[a]}; \tilde{\vartheta}_1^{[a]}; \tilde{\eta}_2^{[a]}; \tilde{\vartheta}_2^{[a]} /$$

paramétereit a következő feltételek határozzák meg:

/5.1/ $\eta_a = \tilde{\eta}_a^{[a]}$
 $\vartheta_a = \ell_a^{[a]} \tau_{3-a}^{[a]} + \tilde{\vartheta}_a^{[a]}$, ahol
 /a/ $\ell_a^{[a]} \geq 0$ egész, $0 \leq \tilde{\vartheta}_a^{[a]} < \tau_{3-a}$, ha $\tau_{3-a} > 0$
 /b/ $\ell_a^{[a]} = 0$, $\tilde{\vartheta}_a^{[a]} = \vartheta_a$, ha $\tau_{3-a} = 0$

/5.2/ $\eta_{3-a} = k_{3-a}^{[a]} \tilde{\eta}_a^{[a]} + \tilde{\eta}_{3-a}^{[a]}$, ahol
 /a/ $k_{3-a}^{[a]} \geq 0$ egész, $0 < \tilde{\eta}_{3-a}^{[a]} \leq \tilde{\vartheta}_a^{[a]}$, ha $\tilde{\vartheta}_a^{[a]} \eta_{3-a} > 0$
 /b/ $k_{3-a}^{[a]} = 0$, $\tilde{\eta}_{3-a}^{[a]} = \eta_{3-a}$, ha $\tilde{\vartheta}_a^{[a]} \eta_{3-a} = 0$

/5.3/ $\vartheta_{3-a} = \ell_{3-a}^{[a]} \tilde{\eta}_a^{[a]} + \tilde{\vartheta}_{3-a}^{[a]}$, ahol
 /a/ $\ell_{3-a}^{[a]} \geq 0$ egész, $0 \leq \tilde{\vartheta}_{3-a}^{[a]} < \tilde{\eta}_a^{[a]}$, ha $\tilde{\eta}_a^{[a]} > 0$
 /b/ $\ell_{3-a}^{[a]} = 0$, $\tilde{\vartheta}_{3-a}^{[a]} = \vartheta_{3-a}$, ha $\tilde{\eta}_a^{[a]} = 0$.

A Δ_a operátort redukciós operátornak nevezzük, mert a $\Delta_a Q$ konfiguráció paramétereit nem nagyobbak a Q konfiguráció paramétereinél, sőt az a paramétere kisebb, amelynél az $\ell_a^{[a]}$, $k_{3-a}^{[a]}$, $\ell_{3-a}^{[a]}$ megfelelő hányados pozitív. Vagyis, ha

/5.4/ $\ell_a^{[a]} + k_{3-a}^{[a]} + \ell_{3-a}^{[a]} > 0$,

akkor legalább egy paraméter csökken. Azt mondjuk, hogy ekkor

Q -ra a Δ_a hatásos. Ha

/5.5/ $\ell_a^{[a]} + k_{3-a}^{[a]} + \ell_{3-a}^{[a]} = 0$,

akkor Δ_a a Q -ra hatástalan. Ekkor azt mondjuk, hogy a Q konfiguráció Δ_a -redukált.

A Δ_1 és Δ_2 operátorok abban különböznek, hogy náluk a $Q^{(1)}$ és a $Q^{(2)}$ job-folyamok szerepe pontosan felcserélt. A Δ_1 operátor az η_1 , a Δ_2 operátor az η_2 paraméter értékét változtatlanul hagyja, a másik hármat redukálhatja. Az /5.1/, /5.2/ és /5.3/ feltételek sorrendje kötött; a redukált paraméterek és az $\ell_a^{[a]}$, $k_{3-a}^{[a]}$, $\ell_{3-a}^{[a]}$ hányadosok meghatározási sorrendje nem cserélhető fel általában. Az /5.2/ és /5.3/ sorrendje azonban közömbös.

Egy Q konfiguráció Δ_a -redukált, ha a hányadosok /5.5/ összege 0. Ha egy Q konfiguráció Δ_1 -redukált, akkor nem feltétlenül Δ_2 -redukált is, és megfordítva. Ehelyett igaz a következő

5.1. Lemma: Ha a $Q^* \in Q$ konfiguráció Δ_a -redukált és

$\tau_a^* \leq \tau_{3-a}^*$ teljesül, akkor
vagy Q^* egyben Δ_{3-a} -redukált is,
vagy $\eta_a^* = 0$ és $\eta_{3-a}^* > 0$ teljesül.

Bizonyítás: Hogy $Q^* \Delta_a$ redukált, az azt jelenti, hogy

$\Delta_a Q^* = Q^*$ és az /5.5/ feltétel teljesül. Az /5.1/-/5.3/ definíciókból azonban /5.5/ akkor következik be, ha

/5.6/ /a/ $0 \leq \eta_a^* < \tau_{3-a}^*$, vagy /b/ $\tau_{3-a}^* = 0$ és

/5.7/ /a/ $0 < \eta_{3-a}^* \leq \eta_a^*$, vagy /b/ $\eta_{3-a}^* \eta_a^* = 0$ és

/5.8/ /a/ $0 \leq \eta_{3-a}^* < \tau_a^*$, vagy /b/ $\tau_a^* = 0$.

Ezzel analóg módon ahhoz, hogy a $Q^* \Delta_{3-a}$ -redukált legyen az kell, hogy

/5.6'/ /a/ $0 \leq \eta_{3-a}^* < \tau_a^*$, vagy /b/ $\tau_a^* = 0$ és

/5.7'/ /a/ $0 < \eta_a^* \leq \eta_{3-a}^*$, vagy /b/ $\eta_a^* \eta_{3-a}^* = 0$ és

/5.8'/ /a/ $0 \leq \eta_a^* < \tau_{3-a}^*$, vagy /b/ $\tau_{3-a}^* = 0$

teljesüljenek.

Az /5.6/ és 5.8'/ valamint az/5.8/ és /5.6'/ azonos fel-
tételek. Tegyük fel, hogy /5.7/ teljesül és $\tau_a^* \leq \tau_{3-a}^*$.

$0 < \eta_{3-a}^* \leq \eta_a^*$ mellett $\tau_{3-a}^* \leq \eta_a^* + \eta_{3-a}^*$ és így $\tau_a^* \leq \tau_{3-a}^*$
relációból $\eta_a^* \leq \eta_{3-a}^*$, azaz /5.7'/ következik.

$\eta_{3-a}^* = 0$ mellett $\tau_a^* \leq \tau_{3-a}^*$ -ből $\eta_a^* \leq \tau_a^* \leq \eta_{3-a}^*$ és
/5.7'/ ismét következik. Így valóban nem marad más lehető-
ség, mint $\eta_a^* = 0$ és $\eta_{3-a}^* > 0$.

Q.e.d.

Értelmezhetők a Δ_a operátorok hatványai az ismételt al-
kalmazásukkal és speciálisan Δ_a^0 mint identitás. Legyen tehát

$$\Delta_a^0 Q \doteq Q, \quad \Delta_a^k Q \doteq \Delta_a / \Delta_a^{k-1} Q / , \quad k = 1, 2, \dots$$

Az /5.1/ - /5.3/ definícióból nyilvánvaló, hogy Δ_a bár-
mely $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációra korlátlan sokszor alkalmazható és ha
egy konfigurációra hatástalan, akkor annak transzformáltjaira
is az. Így egyértelmű módon definiálható az a minimális $\nu_a \geq 0$
egész, amelynél Δ_a operátor a $\Delta_a^{\nu_a} Q$ konfigurációra már ha-
tástalan, de $\nu_a > 0$ esetén a $\Delta_a^{\nu_a-1} Q$ konfigurációra hatásos.
Ezt a $0 \leq \nu_a \leq \infty$ számot a Q Δ_a -összetettségi fokának
nevezzük. Ez lehet végtelen is, ha nincs a fenti feltételnek
eleget tevő véges ν_a egész. Véges ν_a esetén a

$$\tilde{Q}_a^{\nu_a} = \Delta_a^{\nu_a} Q$$

konfigurációt a $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció Δ_a -redukáltjának nevezzük.

Ha $\nu_a = 0$, akkor maga Q Δ_a -redukált.

A /4.18/ és /5.6/-/5.8/ feltételek összehasonlításából nyil-
vánvaló, hogy minden Δ_a -redukált Q^* konfiguráció egyben \mathfrak{D}_1 és
 \mathfrak{D}_2 -redukált konfiguráció is. Fordítva természetesen nem feltét-
lenül igaz. A Δ_a -redukció abban különbözik a \mathfrak{D}_1 -redukciótól,
hogy a η_1 és η_2 paramétereken kívül az η_{3-a} paramétert is re-
dukálja. A Δ_a -redukció generálta

$$(\ell^{[a]}): \ell_{a,0}^{[a]}, \eta_{3-a,0}^{[a]}, \eta_{3-a,0}^{[a]}, \ell_{a,1}^{[a]}, \eta_{3-a,1}^{[a]}, \eta_{3-a,1}^{[a]}, \dots$$

hányados-sorozat és a \mathcal{D}_i -redukció generálta

$$(\ell^{[i]}): \ell_{i,0}^{[i]}, \ell_{3-i,0}^{[i]}, \ell_{i,1}^{[i]}, \ell_{3-i,1}^{[i]}, \dots$$

hányados-sorozat között természetesen meghatározott kapcsolat van, sőt a Δ_a -redukció generálta sorozat több \mathcal{D}_i -redukció generálta sorozatot határozhat meg, ez a kapcsolat azonban korántsem triviális és részletesebb elemzést igényel. E kérdésre az 5.6. pontban térünk vissza.

Ki kell emelnünk az /5.1/-/5.3/ feltételekkel definiált Δ_a -redukciós lépés egy sajátosságát. Amíg a \mathcal{D}_i -redukciós lépésekhez hasonlóan a $\eta_a > 0$ és $\eta_{3-a} > 0$ paraméterek bármelyike 0-vá válhat a lépés következtében, addig egy $\eta_{3-a} > 0$ paraméter sohasem válhat 0-vá a Δ_a -redukciós lépés eredményeként. Amíg ugyanis $\ell_i^{[a]}$ egy η_i / τ_{3-i} hányados egész része és $\tilde{\eta}_i^{[a]}$ értékét e hányados törtrésze határozza meg, ami 0 is lehet, addig $k_{3-a}^{[a]} = f(\eta_{3-a} / \tilde{\eta}_a^{[a]})$, egy más típusú függvény, amelynél $z - f(z) = 0$ kizárt /1. 2.1.pont/. Erre az eltérő definícióra azért van szükség, mert egy $\eta_{3-a} > 0$ paraméter eltűnése a \mathcal{Q} konfiguráció $R_{i,3-i}$ ütemtervének jellegzetességét a "felismerhetetlenségig" megváltoztathatná és egyik a másiktól nem lenne rekonstruálható. Márpedig a Δ_a -redukció célja éppen az, hogy \mathcal{Q} konfiguráció $R_{i,3-i}$ ütemterveit egyszerűbb konfiguráció ütemterveinek vizsgálatára vezesse vissza "reverzibilis" módon.

A Δ_1 - és Δ_2 -redukció szimmetriája lehetővé teszi, hogy a kettő helyett csak egyik tulajdonságaival foglalkozzunk az egész \mathcal{Q} konfiguráció-téren. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a \mathcal{D}_i -redukciókkal analóg módon /1. 4.2. pont/

$$/5.9/ \quad \Delta_{3-i} \mathcal{Q} = \overline{\Delta_i \bar{\mathcal{Q}}}, \quad i=1,2, \quad \mathcal{Q} \in \mathcal{Q},$$

ahol $\bar{\mathcal{Q}} \in \mathcal{Q}$ a $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}$ konfiguráció

konjugáltja, amelynek paramétereit a /4.19/ alatt definiáltuk.

Vezessük be az [1] felső index elhagyásával nyert jelöléseket a

$$\Delta \doteq \Delta_1$$

operátor alkalmazásával generált mennyiségekre és használjuk a

$$Q_k = / \eta_1; \vartheta_{1,k}; \eta_{2,k}; \vartheta_{2,k} / , k=0,1,\dots$$

$$\tau_{1,k} = \eta_1 + \vartheta_{1,k} , \quad \tau_{2,k} = \eta_{2,k} + \vartheta_{2,k} , k=0,1,\dots$$

jelöléseket a

$$Q_k = \Delta^k Q , k=0,1,\dots$$

konfigurációk paramétereire. Legyenek

$$(\ell) : \ell_{1,0}, k_{2,0}, \ell_{2,0}, \ell_{1,1}, k_{2,1}, \ell_{2,1}, \dots$$

$$(\lambda) : \ell_{1,0}, k_{2,0} + \ell_{2,0}, \ell_{1,1}, k_{2,1} + \ell_{2,1}, \dots$$

sorozatok a Δ -redukció generálta hányados sorozatok amelyeknél

$$\ell_{3k} = \ell_{1,k}, \ell_{3k+1} = k_{2,k}, \ell_{3k+2} = \ell_{2,k}, k=0,1, \dots$$

$$\lambda_{2k} = \ell_{1,k}, \lambda_{2k+1} = k_{2,k} + \ell_{2,k}, k=0,1, \dots$$

A hányadosokat és a $/Q/$: Q_0, Q_1, \dots sorozat tagjait az /5.1/-/5.3/ definícióval összhangban az

$$/5.10/ \quad \eta_{1,k+1} = \eta_{1,k}$$

$$/5.11/ \quad \vartheta_{1,k} = \ell_{1,k} \tau_{2,k} + \vartheta_{1,k+1}, \text{ ahol}$$

$$/a/ \quad \ell_{1,k} \geq 0 \text{ egész, } 0 \leq \vartheta_{1,k+1} < \tau_{2,k}, \text{ ha } \tau_{2,k} > 0$$

$$/b/ \quad \ell_{1,k} = 0, \quad \vartheta_{1,k+1} = \vartheta_{1,k}, \text{ ha } \tau_{2,k} = 0$$

$$/5.12/ \quad \eta_{2,k} = k_{2,k} \vartheta_{1,k+1} + \eta_{2,k+1}, \text{ ahol}$$

$$/a/ \quad k_{2,k} \geq 0 \text{ egész, } 0 < \eta_{2,k+1} \leq \vartheta_{1,k+1}, \text{ ha } \eta_{2,k} \vartheta_{1,k+1} > 0$$

$$/b/ \quad k_{2,k} = 0, \quad \eta_{2,k+1} = \eta_{2,k}, \text{ ha } \eta_{2,k} \vartheta_{1,k+1} = 0$$

$$/5.13/ \quad \vartheta_{2,k} = \ell_{2,k} \tau_{1,k+1} + \vartheta_{2,k+1}, \text{ ahol}$$

$$/a/ \quad \ell_{2,k} \geq 0 \text{ egész, } 0 \leq \vartheta_{2,k+1} < \tau_{1,k+1}, \text{ ha } \tau_{1,k+1} > 0$$

$$/b/ \quad \ell_{2,k} = 0, \quad \vartheta_{2,k+1} = \vartheta_{2,k}, \text{ ha } \tau_{1,k+1} = 0$$

definíciós feltételek határozzák meg rendre $k=1,2,\dots$

indexekre.

Legyen \forall a Q konfiguráció Δ -összetettségi foka, amelyet az a feltétel határoz meg, hogy az első ≥ 0 egész, amelyre

$$Q_v \doteq \Delta^v Q_0$$

már Δ -redukált, ha ilyen van, egyébként $v = \infty$. Véges v esetén a Δ operátor a Q_v konfigurációra hatástalan és

$$Q_{v+k} \doteq \Delta^k Q_v = Q_v, \quad k=0,1,\dots$$

Gyakran használjuk a $Q^\#$ jelölést a Q konfiguráció Δ -redukáltjára. Nyilván

$$\Delta Q^\# = Q^\#.$$

Ha v véges, akkor a (λ) sorozat véges sok pozitív tagot tartalmaz és egy λ_k tagtól kezdve csupa 0. Vagyis ilyenkor a sorozat

$$m \doteq |(\lambda)|$$

hossza véges.

Annak feltételei, hogy Δ a Q_v konfigurációra hatástalan legyen az /5.5/ szerint

$$\text{/5.14/} \quad \ell_{1,v} + k_{2,v} + \ell_{2,v} = 0,$$

az /5.6/-/5.8/ szerint pedig

$$\text{/5.15/} \quad \text{/a/} \quad 0 \leq \vartheta_{1,v} < \tau_{2,v}, \text{ vagy } \text{/b/} \quad \tau_{2,v} = 0 \quad \text{és}$$

$$\text{/5.16/} \quad \text{/a/} \quad 0 < \eta_{2,v} \leq \vartheta_{1,v}, \text{ vagy } \text{/b/} \quad \eta_{2,v} \vartheta_{1,v} = 0 \quad \text{és}$$

$$\text{/5.17/} \quad \text{/a/} \quad 0 \leq \vartheta_{2,v} < \tau_{1,v}, \text{ vagy } \text{/b/} \quad \tau_{1,v} = 0.$$

Az /5.15/-/5.17/ feltételek nem egymást kizárók. Így például az /5.15/b/-ből az /5.16/ és /5.17/ következik, az /5.17/b/-ből pedig az /5.15/ és /5.16/ következik.

Célszerű alternatív feltételeket is megadni arra, hogy Q_v

Δ -redukált legyen. Erre szolgál az alábbi lemma.

5.2. Lemma: A Δ operátor a Q_v konfigurációra akkor és csak akkor hatástalan, ha az alábbi feltételek egyike teljesül:

$$/5.18/ \quad (\alpha) \quad \tau_{1,v} \tau_{2,v} = 0$$

$$/5.19/ \quad (\beta) \quad \tau_{1,v} \tau_{2,v} > 0, \quad \vartheta_{1,v} = 0 \text{ és } 0 \leq \vartheta_{2,v} < \eta_1$$

$$/5.20/ \quad (\delta) \quad \vartheta_{1,v} \tau_{2,v} > 0, \quad \eta_{2,v} = 0 \text{ és } 0 < \vartheta_{1,v} < \vartheta_{2,v} < \tau_{1,v}$$

$$/5.21/ \quad (\delta) \quad \vartheta_{1,v} \eta_{2,v} > 0, \quad 0 < \eta_{2,v} \leq \vartheta_{1,v} < \tau_{2,v} \text{ és } 0 \leq \vartheta_{2,v} < \tau_{1,v}.$$

Bizonyítás: Hogy az (α) - (δ) feltételek bármelyike elegendő,

azt egyszerűen beláthatjuk úgy, hogy rendre ellenőrizzük az

/5.15/-/5.17/ teljesülését. Ez ránézésre eldönthető. Az (α) - (δ)

egykének szükségességét indirekt láthatjuk be. Tegyük fel,

hogy egyik sem teljesül. Belátjuk, hogy akkor az /5.15/-/5.17/

valamelyike nem teljesül. Feltetésünk szerint $\tau_{1,v} \tau_{2,v} > 0$,

ezért /5.15/b/ és /5.17/b/ nem teljesül. (β) nem teljesülése-

kor vagy $\vartheta_{1,v} > 0$, vagy $\vartheta_{2,v} > \eta_1$. Az első esetben (δ) nem-

teljesüléséhez vagy $\eta_{2,v} > 0$, amikor is /5.16/b/ sem lehet, vagy

$\vartheta_{1,v} \geq \vartheta_{2,v}$, vagy $\vartheta_{2,v} \geq \tau_{1,v}$. Az utóbbi kizárja /5.17/-et.

Az előbbi mellett a (δ) nemteljesüléséhez vagy $\eta_{2,v} > \vartheta_{1,v}$,

ami kizárja /5.16/-ot, vagy $\vartheta_{1,v} \geq \tau_{2,v}$, ami kizárja /5.15/-öt,

vagy $\vartheta_{2,v} \geq \tau_{1,v}$, ami kizárja /5.17/-et. A második esetben /a-

mikor $\vartheta_{2,v} > \eta_1$ /, akkor (δ) nemteljesüléséhez vagy $\vartheta_{1,v} = 0$, ami

kizárja /5.17/-et, vagy $\eta_{2,v} > 0$, vagy $\vartheta_{1,v} \geq \vartheta_{2,v}$, vagy

$\vartheta_{2,v} \geq \tau_{1,v}$. $\eta_{2,v} > 0$ mellett (δ) nemteljesüléséhez vagy $\eta_{2,v} > \vartheta_{1,v}$,

ami kizárja /5.16/-ot, vagy $\vartheta_{1,v} \geq \tau_{2,v}$, ami kizárja /5.15/-öt, vagy

$\vartheta_{2,v} \geq \tau_{1,v}$, ami kizárja /5.17/-et. $\vartheta_{1,v} \geq \vartheta_{2,v}$ mellett (δ)

nemteljesüléséhez vagy $\eta_{2,v} = 0$, amiből $\vartheta_{1,v} \geq \tau_{2,v} > \eta_1$ ellentmond

/5.15/-nek, vagy $\eta_{2,v} > \vartheta_{1,v}$, vagy $\vartheta_{1,v} \geq \tau_{2,v}$, vagy $\vartheta_{2,v} \geq \tau_{1,v}$,

amelyek rendre ellentmondanak az /5.16/, /5.15/, ill. /5.17/ fel-

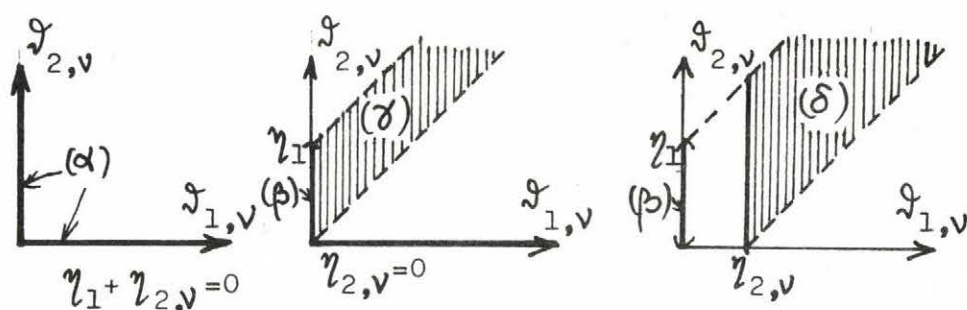
tételeknek. $\vartheta_{2,v} \geq \tau_{1,v}$ mellett /5.17/ nem teljesül. Ezzel az

összes lehetséges (α) - (δ) nemteljesülési lehetőségnél ellent-

mondásra jutottunk /5.15/-/5.17/-tel.

Q.e.d.

Az /5.18/-/5.21/ eseteket szemléltetik az 5.1.Ábrák.



5.1. Ábra: Δ -redukált konfigurációk tartományai.

A következő lemma a (λ) sorozat strukturáját világítja meg.

5.3. Lemma: Legyen a (λ) sorozatban $l_{1,0}$ után

$$l_{1,k} = 0, k \geq 1, \text{ vagy } k_{2,k} + l_{2,k} = 0, k \geq 0,$$

az első 0 mennyiség, ha ilyen egyáltalán létezik. Ebben az esetben (λ) sorozatban az összes további tagok 0-ák és a szóbanforgó Q konfiguráció Δ -összetettségi foka

$$k_{2,0} + l_{2,0} = 0 \text{ esetén } v = 0, \text{ ha } l_{1,0} = 0$$

$$v = 1, \text{ ha } l_{1,0} > 0$$

$$k > 0 \text{ esetén } v = k, \text{ ha } l_{1,k} = 0$$

$$v = k+1, \text{ ha } k_{2,k} + l_{2,k} = 0, l_{1,k} > 0.$$

Bizonyítás: Ha $l_{1,0} = k_{2,0} + l_{2,0} = 0$ / $k=0$ /, akkor $v=0$ -ra /5.1o/ teljesül. Ha $l_{1,0} > 0$, de $k_{2,0} + l_{2,0} = 0$, akkor $k=0$ -ra teljesül, hogy $l_{1,k} > 0, k_{2,k} + l_{2,k} = 0$. Az utóbbi következtében /5.2/, /5.3/-ből /megfelelő átjelölésekkel/ $\tau_{2,k+1} = \tau_{2,k}$ adódik, aminek következtében a Δ operátor újbóli alkalmazásakor /5.1/-ből $l_{1,k+1} = 0$ adódnék. Ennek eredményeként $\tau_{1,k+2} = \tau_{1,k+1}$ és $\tau_{2,k+2} = \tau_{2,k+1}$, vagyis Δ a Q_{k+1} -re már hatástalan. Ezért valóban $v=k+1$. Ez $k \geq 0$ bármely értéke esetén igaz. Ha valamely $k > 0$ -ra $l_{1,k} = 0$, de $k_{2,k-1} + l_{2,k-1} > 0$ volt, akkor /5.1/-ből $\tau_{1,k+1} = \tau_{1,k}$ ezért /5.2/ és /5.3/-ből $k_{2,k} = l_{2,k} = 0$ adódik. Vagyis $v=k$ értékre /5.1o/ teljesül.

Q.e.d.

Nevezünk egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációt Δ -redukálhatónak, ha van olyan véges v , hogy a $Q_v = \Delta^v Q$ konfigurációra Δ már hatástalan. A legkisebb ilyen v a Q Δ -összetettségi foka definíció szerint. Ekkor a (λ) sorozat a λ_{2v} tagtól kezdve biztosan csupa 0.

Megjegyzés: Az 5.3 Lemma fontos következménye, hogy bármely nem Δ -redukált Q_0 konfiguráció Δ -redukciója közben az első és az utolsó redukciós lépés kivételével minden lépésben mind a $Q^{(1)}$, mind a $Q^{(2)}$ job-folyamok paramétereinek redukálódniuk kell. Pontosabban kifejezve: $1 \leq v < \infty$ mellett

$$\begin{aligned} & \ell_{1,0} + k_{2,0} + \ell_{2,0} \geq 1, & \text{ha } v=1, \\ /5.22/ & \ell_{1,0} \geq 0, \ell_{1,k} \geq 1, \quad 1 \leq k \leq v-1 & \text{ha } v > 1. \\ & k_{2,k} + \ell_{2,k} \geq 1, \quad 0 \leq k \leq v-2, \quad k_{2,v-1} + \ell_{2,v-1} \geq 0 \end{aligned}$$

5.4. Lemma: Tetszőleges $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációhoz van olyan véges $v' \geq 0$ egész, hogy a

$$\Delta^{v'} Q \equiv Q_{v'}$$

konfiguráció vagy

Δ -redukált

vagy az

$$/5.23/ \quad \eta_1 \vartheta_{2,v'} = 0$$

feltétel teljesül, azaz $Q_{v'}$ egy speciális elfajult konfiguráció.

Bizonyítás: Ha $\eta_1 = 0$, akkor $v' = 0$ -ra igaz az /5.23/. Legyen tehát $\eta_1 > 0$. Ha $\ell_{2,k} > 0$, akkor az /5.13/-ból

$$\vartheta_{2,k} - \vartheta_{2,k+1} = \ell_{2,k} \tau_{1,k+1} \geq \tau_{1,k+1} \geq \eta_1 > 0,$$

vagyis a $\vartheta_{2,k}$ paraméter legalább $\eta_1 > 0$ értékkel csökken.

Mivel $\vartheta_{2,0}$ véges és $\vartheta_{2,k+1}$ nem válhat negatívvá, az (ℓ) sorozatban legfeljebb véges sok $\ell_{2,k} > 0$ tag lehet. Ekkor tehát van olyan $k_0 \geq 0$, hogy

$$\ell_{2,k} = 0, \quad \vartheta_{2,k} = \vartheta_{2,k_0}, \quad \text{ha } k \geq k_0.$$

Ha $\vartheta_{2,k_0} = 0$, akkor $v' = k_0$ -ra az /5.23/ igaz.

Legyen tehát $\vartheta_{2,k_0} > 0$. Ha $\ell_{1,k} > 0$, akkor az /5.11/-ből

$$\vartheta_{1,k} - \vartheta_{1,k+1} = \ell_{1,k} \tau_{2,k} \geq \tau_{2,k} \geq \vartheta_{2,k} \geq \vartheta_{2,k_0} > 0,$$

vagyis a $\vartheta_{1,k}$ paraméter legalább $\vartheta_{2,k_0} > 0$ értékkel csökken.

Ezért a $(\lambda)^{1,k}$ sorozatban csak véges sok $\ell_{1,k} > 0$ tag lehet.

Ha $\ell_{1,v'-1} > 0$ az utolsó pozitív $\ell_{1,k}$ tag, akkor az 5.3.

Lemma szerint a $Q_{v'}$ már redukált.

Q.e.d.

Az 5.4 Lemma szerint $\eta_1 > 0$ esetben a Q_0 konfiguráció vagy Δ -redukálható, vagy véges $v' \geq 0$ indexnél $\vartheta_{2,v'} = 0$, azaz

$$Q_{v'} = / \eta_1; \vartheta_{1,v'}; \eta_{2,v'}; 0 /$$

konfigurációra vezet. A redukálhatóság szempontjából tehát továbbra csupán a

$$/5.24/ \quad Q_0 = / \eta_1; \vartheta_{1,0}; \eta_{2,0}; 0 / , \quad \eta_1 \geq 0,$$

alakú konfigurációk, valamint a

$$/5.25/ \quad Q_0 = / 0; \vartheta_{1,0}; \eta_{2,0}; \vartheta_{2,0} /$$

konfigurációk vizsgálandók.

Az /5.24/ konfigurációra a Δ -redukciós lépések eredménye $\eta_{2,0} > 0$ esetén a

$$\xi_0 = \vartheta_{1,0} / \eta_{2,0}$$

szám lánc törtfejtése azzal a módosító kikötéssel, hogy a $\xi_0 = [b_0, b_1, \dots, b_n]$ véges lánc törtfejtésben n nem lehet páratlan.

Ugyanis az $\eta_{2,n} > 0$ követelmény racionális ξ_0 esetén páros n -re történő lánc törtfejtést követel meg. Tudjuk, hogy

ez mindig lehetséges [P4]. Irracionális ξ_0 esetén a lánc-törtfejtés végtelen, ezért Q_0 nem redukálható. $\eta_{2,0}=0$ esetben az /5.24/ eleve redukált. Ez a megállapítás $\eta_1 > 0$ feltételtől függetlenül igaz. Nyilván $\eta_{1,0}=0$ esetben /5.24/ legfeljebb egy lépésben redukálódik. Ezzel bizonyítottuk a következő lemmát.

5.5. Lemma: A $Q \in Q$ konfiguráció
 $\eta_2 = 0$

elfajulás mellett akkor és csak akkor Δ -redukálható, ha η_1 és η_2 racionálisan összefüggők.
Bizonyítás: Kész.

Q.e.d.

Ami az /5.25/ konfigurációt illeti, a $\eta_{2,0}=0$ speciális esetet az 5.5. Lemma tisztázza. A $\eta_{1,0}=0$ speciális esetben Q_0 Δ -redukált. Csupán a $\eta_{1,0}\eta_{2,0} > 0$ eset vizsgálendő még. $\eta_{2,0}=0$ speciális esetben a Δ -redukció a $\xi_0 = \eta_{1,0}/\eta_{2,0}$ lánc-törtfejtésével ekvivalens, amely akkor és csak akkor véges, ha ξ_0 racionális. Ebből az is következik, hogy Q_0

Δ -redukálhatósága tisztázott, ha véges lépésben bármelyik paraméter 0-vá válik a $\eta_{1,k}, \eta_{2,k}, \eta_{2,k}$ közül. Ha viszont véges lépésben egyik sem válik 0-vá, akkor bármelyikre egy $\varepsilon > 0$ alsó határt feltételezve, a monoton csökkenés miatt ellentmondásba kerülnénk Δ végtelen sokszori hatásosságával /az 5.4 Lemma bizonyításával analóg módon/. Vagyis akkor mindegyik paraméter 0-hoz tart. Foglaljuk e megfontolásokat is egy lemmába.

5.6. Lemma: A $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció az

$$\eta_1 = 0$$

elfajulás mellett, vagy Δ -redukálható, vagy

$$Q_k \rightarrow 0.$$

$\vartheta_1 \tau_2 = 0$ esetén Q maga Δ -redukált, $\eta_2 \vartheta_2 = 0$ esetben akkor és csak akkor Δ -redukálható, ha ϑ_1 és ϑ_2 racionálisan összefüggők.

Bizonyítás: Triviális a megelőző megfontolásokból.

Q.e.d.

Az alábbi lemma az 5.4. Lemma következménye, de érdemes kiemelni.

5.7. Lemma: A $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció Δ -redukálható, ha

$$/5.26/ \quad \eta_1 > 0, \quad \vartheta_1 \eta_2 = 0.$$

Bizonyítás: Az 5.4. Lemma szerint Q vagy Δ -redukálható, vagy véges ν számú Δ -operáció után $\vartheta_{2,\nu} = 0$ lesz. Azonban $\vartheta_1 \eta_2 = 0$ következtében biztosan $\vartheta_{1,\nu} \eta_{2,\nu} = 0$ is fennáll. Ekkor azonban Q_ν mindenképpen Δ -redukált.

Q.e.d.

Függetlenül attól, hogy egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció Δ -redukálható-e, vagy nem, a Q -ra a Δ operátor akárhányszor alkalmazható és a (Q) és (λ) sorozatok az /5.10/-/5.13/ feltételekkel rekurzíve definiálva vannak. Az /5.10/-/5.13/ definíciót tekinthetjük az euklideszi algoritmus egy lépése általánosításának. Ha a

$$\tau_{1,0} = \eta_1 + \vartheta_{1,0}, \quad \tau_{2,0} = \eta_{2,0} + \vartheta_{2,0}$$

felbontásokban a $0 \leq \eta_1 \leq \vartheta_{1,0}$ és $0 \leq \eta_{2,0} \leq \vartheta_{2,0}$ komponenseket paramétereknek tekintjük, akkor az $\eta_1=0$ és $\eta_{2,0} \vartheta_{2,0}=0$ speciális esetekben a Δ -redukció a $\xi_0 = \tau_{1,0}/\tau_{2,0}$ szám lánc-törtfejtését eredményező euklideszi algoritmussal ekvivalens. Ugyanúgy, ahogy a \mathcal{D} -redukció és a lánc-törtfejtés kapcsolatát vizsgáltuk a 4.5. pontban, vizsgálható lenne a Δ -redukció és a lánc-törtfejtés kapcsolata is. Ezzel nem foglalkozunk.

Az alább következő összefüggések, amelyekre az R_{12} ütemtervek vizsgálatához lesz szükségünk, számos analógiát mutatnak a lánc-törtfejtéssel kapcsolatosan a 2.4. pontban közölt eredményekkel, valamint a 4.2. pontban levezetett, a \mathcal{D} -redukcióval kapcsolatos összefüggésekkel.

Először bizonyos sorozatokat definiálunk, amelyekre szükségünk lesz, és felírjuk a köztük lévő összefüggéseket. Ezek segítségével tudunk majd konfigurációk paramétereire és ütemterv-jellemzőire vonatkozó összefüggéseket egyszerűbben igazolni. A rengeteg szimbólum eléggé elriasztó, azonban ezek segítségével bonyolult összefüggések egyszerű formát öltenek.

Hogy éppen az itt következő mennyiségeket kell definiálni az tulajdonképpen az /5.10/-/5.13/ alább következő közvetlen következményeiből látszik. Az /5.10/-/5.13/ szerint bármely Q_k esetén fennállnak az

$$\begin{aligned}
 & \eta_{1,k} = \eta_{1,k+1} \\
 & \vartheta_{1,k} = \ell_{1,k} \tau_{2,k} + \vartheta_{1,k+1} \\
 /5.27/ \quad & \eta_{2,k} = k_{2,k} \vartheta_{1,k+1} + \eta_{2,k+1} \\
 & \vartheta_{2,k} = \ell_{2,k} \tau_{1,k+1} + \vartheta_{2,k+1}
 \end{aligned}
 \quad k=0,1,\dots$$

összefüggések. Ezek alapján a Q_k és $Q_{k+1} = \Delta Q_k$ paramétereik között fennállnak a következő egyenletrendszerek.

$$\begin{aligned}
 & \eta_{1,k} = \eta_{1,k+1} \\
 /5.28/ \quad & \vartheta_{1,k} = \ell_{1,k} \ell_{2,k} \eta_{1,k+1} + \ell_{1,k} (k_{2,k} + \ell_{2,k}) + 1 / \vartheta_{1,k+1} + \ell_{1,k} \eta_{2,k+1} + \ell_{1,k} \vartheta_{2,k+1} \\
 & \eta_{2,k} = k_{2,k} \vartheta_{1,k+1} + \eta_{2,k+1} \\
 & \vartheta_{2,k} = \ell_{2,k} \eta_{1,k+1} + \ell_{2,k} \vartheta_{1,k+1} + \vartheta_{2,k+1} \\
 /5.29/ \quad & \tau_{1,k} = \ell_{1,k} (k_{2,k} + \ell_{2,k}) + 1 / \tau_{1,k+1} + \ell_{1,k} \tau_{2,k+1} - \ell_{1,k} k_{2,k} \eta_{1,k+1} \\
 & \tau_{2,k} = (k_{2,k} + \ell_{2,k}) \tau_{1,k+1} + \tau_{2,k+1} - k_{2,k} \eta_{1,k+1} .
 \end{aligned}$$

Ha ezekből az egyenletrendszerekből a Q_{k+1} paramétereit fejezzük ki, akkor a következő rendszereket kapjuk.

$$\begin{aligned}
 & \eta_{1,k+1} = \eta_{1,k} \\
 /5.28'/ \quad & \vartheta_{1,k+1} = \vartheta_{1,k} - \ell_{1,k} \eta_{2,k} - \ell_{1,k} \vartheta_{2,k} \\
 & \eta_{2,k+1} = -k_{2,k} \vartheta_{1,k} + (\ell_{1,k} k_{2,k} + 1) \eta_{2,k} + \ell_{1,k} k_{2,k} \vartheta_{2,k} \\
 & \vartheta_{2,k+1} = -\ell_{2,k} \eta_{1,k} - \ell_{2,k} \vartheta_{1,k} + \ell_{1,k} \ell_{2,k} \eta_{2,k} + (\ell_{1,k} \ell_{2,k} + 1) \vartheta_{2,k} \\
 & \tau_{1,k+1} = \tau_{1,k} - \ell_{1,k} \tau_{2,k} \\
 /5.29'/ \quad & \tau_{2,k+1} = -(k_{2,k} + \ell_{2,k}) \tau_{1,k} + \ell_{1,k} (k_{2,k} + \ell_{2,k}) + 1 / \tau_{2,k} + k_{2,k} \eta_{1,k} .
 \end{aligned}$$

Definiáljuk a következő sorozatokat.

$$\begin{aligned}
 A_{-2} &= 0, B_{-2} = 1, A_{-1} = 1, B_{-1} = 0 \\
 A_{2k} &= \ell_{1,k} A_{2k-1} + A_{2k-2} \\
 /5.30/ \quad B_{2k} &= \ell_{1,k} B_{2k-1} + B_{2k-2} \quad k=0,1,\dots \\
 A_{2k+1} &= (k_{2,k} + \ell_{2,k}) A_{2k} + A_{2k-1} \\
 B_{2k+1} &= (k_{2,k} + \ell_{2,k}) B_{2k} + B_{2k-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{-2} &= 0, D_{-2} = 1, C_{-1} = 0, D_{-1} = 0 \\
 C_{2k} &= A_{2k} \\
 /5.31/ \quad D_{2k} &= B_{2k} \quad k=0,1,\dots \\
 C_{2k+1} &= k_{2,k} C_{2k} + C_{2k-1} \\
 D_{2k+1} &= k_{2,k} D_{2k} + D_{2k-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B'_{-2} &= 1, B''_{-2} = 1, B'_{-1} = 0, B''_{-1} = 0 \\
 B'_{2k} &= \ell_{1,k} B'_{2k-1} + B'_{2k-2} \\
 /5.32/ \quad B''_{2k} &= \ell_{1,k} B''_{2k-1} + B''_{2k-2} \quad k=0,1,\dots \\
 B'_{2k+1} &= (k_{2,k} + \ell_{2,k}) B'_{2k} + B'_{2k-1} - \ell_{2,k} \\
 B''_{2k+1} &= (k_{2,k} + \ell_{2,k}) B''_{2k} + B''_{2k-1} - k_{2,k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D'_{-2} &= 1, D''_{-2} = 1, D'_{-1} = 0, D''_{-1} = 0 \\
 D'_{2k} &= B'_{2k} \\
 /5.33/ \quad D''_{2k} &= B''_{2k} \quad k=0,1,\dots \\
 D'_{2k+1} &= k_{2,k} D'_{2k} + D'_{2k-1} \\
 D''_{2k+1} &= k_{2,k} D''_{2k} + D''_{2k-1} - k_{2,k}
 \end{aligned}$$

Bármely fenti (X) és (Y) sorozat-párra használjuk a

$$/5.34/ \quad H_k / X, Y / \doteq \begin{vmatrix} X_k & Y_k \\ X_{k-1} & Y_{k-1} \end{vmatrix} \doteq X_k Y_{k-1} - X_{k-1} Y_k, \quad k=-1, 0, 1, \dots$$

determináns jelölést.

Definiáljuk még a

$$\begin{aligned} /5.35/ \quad \tilde{\eta}_{1,k} &= \eta_{1,k} + B'_{2k-2} \eta_1 \\ \tilde{\eta}_{2,k} &= -\eta_{2,k} + D'_{2k-1} \eta_1, \quad k=0, 1, \dots \\ \tilde{\eta}_{2,k} &= -\eta_{2,k} + (B'_{2k-1} - D'_{2k-1}) \eta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} /5.36/ \quad \tilde{\tau}_{1,k} &= \tau_{1,k} + (B'_{2k-2} - 1) \eta_1 \\ \tilde{\tau}_{2,k} &= -\tau_{2,k} + B'_{2k-1} \eta_1, \quad k=0, 1, \dots \end{aligned}$$

mennyiségeket és a

$$/5.37/ \quad \tilde{\tau}_k = \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_{1,k} \\ \tilde{\tau}_{2,k} \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q}_k = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_{1,k} \\ \tilde{\eta}_{2,k} \\ \tilde{\eta}_{2,k} \end{pmatrix}, \quad k=0, 1, \dots$$

vektorokat. Vezessük még be a

$$/5.38/ \quad D_k = \begin{pmatrix} B_{2k-2} & A_{2k-2} \\ B_{2k-1} & A_{2k-1} \end{pmatrix}, \quad k=0, 1, \dots$$

$$/5.39/ \quad \Delta_k = \begin{pmatrix} B_{2k-2} & A_{2k-2} & A_{2k-2} \\ D_{2k-1} & C_{2k-1} + 1 & C_{2k-1} \\ B_{2k-1} - D_{2k-1} & A_{2k-1} - C_{2k-1} - 1 & A_{2k-1} - C_{2k-1} \end{pmatrix} \quad k=0, 1, \dots$$

$$/5.40/ \quad D_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & l_{1,k} \\ k_{2,k} + l_{2,k} & l_{1,k}(k_{2,k} + l_{2,k}) + 1 \end{pmatrix}, \quad k=0,1,\dots$$

$$/5.41/ \quad \Delta_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & l_{1,k} & l_{1,k} \\ k_{2,k} & l_{1,k}k_{2,k+1} & l_{1,k}k_{2,k} \\ l_{2,k} & l_{1,k}l_{2,k} & l_{1,k}l_{2,k+1} \end{pmatrix}, \quad k=0,1,\dots$$

mátrix jelöléseket.

Az /5.30/-/5.34/ és /5.38/-/5.41/ alatt definiált mennyiségekre vonatkozóan az összefüggéseket a következő lemma tartalmazza.

5.8. Lemma: Az /5.30/-/5.34/ és a /5.38/-/5.41/ mennyiségekre vonatkozóan igazak az alábbi összefüggések:

$k=-1,0,1,\dots$ értékekre

$$/5.42/ \quad H_k/Y,X/ = -H_k/X,Y/$$

$$/5.43/ \quad H_k/A,B/ \triangleq A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k = (-1)^{k-1}$$

$$/5.44/ \quad /A_k, B_k/, /A_k, A_{k-1}/, /B_k, B_{k-1}/, /A_{k-1}, B_{k-1}/ \text{ relativ primek } /*/$$

$$/5.45/ \quad /a/ \quad B_{2k}^{\#} + B_{2k}^{\#} = B_{2k} + 1$$

$$/b/ \quad B_{2k+1}^{\#} + B_{2k+1}^{\#} = B_{2k+1}$$

$$/5.46/ \quad /a/ \quad D_{2k}^{\#} + D_{2k}^{\#} = D_{2k} + 1$$

$$/b/ \quad D_{2k+1}^{\#} + D_{2k+1}^{\#} = D_{2k+1} \quad ;$$

/*/ A /0,1/ számpárat is relativ primnek tekintjük

$k=0,1,2,\dots$ értékekre / $\sum_{i=0}^{-1} x_i = 0$ definícióval! /

$$/a/ \quad H_{2k}/B,A/ = H_{2k-1}/A,B/ = 1$$

$$/5.47/ \quad /b/ \quad H_{2k}/B',A/ = H_{2k-1}/A,B'/ = A_{2k-1}^{-C_{2k-1}} = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \ell_{2,i} A_{2i}$$

$$/c/ \quad H_{2k}/B'',A/ = H_{2k-1}/A,B''/ = C_{2k-1}^{+1} = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} k_{2,i} A_{2i}$$

$$/a/ \quad H_{2k}/B',B/ = H_{2k-1}/B,B'/ = B_{2k-1}^{-D_{2k-1}} = \sum_{i=0}^{k-1} \ell_{2,i} B_{2i}$$

$$/5.48/ \quad /b/ \quad H_{2k}/B'',B/ = H_{2k-1}/B,B''/ = D_{2k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} k_{2,i} B_{2i}$$

$$/c/ \quad H_{2k}/B'',B'/ = H_{2k-1}/B',B''/ = D_{2k-1}^{-B_{2k-1}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} k_{2,i} B_{2i}' - \sum_{i=0}^{k-1} \ell_{2,i} B_{2i}''$$

$$/5.49/ \quad A_{2k} D_{2k}^{-B_{2k}} C_{2k} = 0, \quad A_{2k-1} D_{2k-1}^{-B_{2k-1}} C_{2k-1} = B_{2k-1}'$$

$$/5.50/ \quad /a/ \quad A_{2k+1} D_{2k}^{-B_{2k+1}} C_{2k} = A_{2k-1} D_{2k}^{-B_{2k-1}} C_{2k} = 1$$

$$/b/ \quad A_{2k} D_{2k+1}^{-B_{2k}} C_{2k+1} = A_{2k} D_{2k-1}^{-B_{2k}} C_{2k-1} = B_{2k-1}'^{-1}$$

$$/5.51/ \quad /a/ \quad B_{2k}' = 1, \quad B_{2k+1}' = 0, \quad \text{ha} \quad k_{2,k} \equiv 0$$

$$/b/ \quad B_{2k}'' = 1, \quad B_{2k+1}'' = 0, \quad \text{ha} \quad \ell_{2,k} \equiv 0$$

$$/5.52/ \quad /a/ \quad D_{2k}' = 1, \quad D_{2k+1}' = 0, \quad \text{ha} \quad k_{2,k} \equiv 0$$

$$/b/ \quad D_{2k}'' = 1, \quad D_{2k+1}'' = 0, \quad \text{ha} \quad \ell_{2,k} \equiv 0$$

$$/5.53/ \quad \underline{D}_k^{-1} = \begin{pmatrix} A_{2k-1} & -A_{2k-2} \\ -B_{2k-1} & B_{2k-2} \end{pmatrix}$$

$$/5.54/ \quad \underline{\Delta}_k^{-1} = \begin{pmatrix} A_{2k-1} & -A_{2k-2} & -A_{2k-2} \\ -B_{2k-1}' & B_{2k-2}' & B_{2k-2}'^{-1} \\ -B_{2k-1}'' & B_{2k-2}''^{-1} & B_{2k-2}'' \end{pmatrix}$$

$$/5.55/ \quad \underline{D}_{k,k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} \ell_{1,k}(k_{2,k} + \ell_{2,k}) + 1 & -\ell_{1,k} \\ -(k_{2,k} + \ell_{2,k}) & 1 \end{pmatrix}$$

$$/5.56/ \quad \underline{\Delta}_{k,k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} \ell_{1,k}(k_{2,k} + \ell_{2,k}) + 1 & -\ell_{1,k} & -\ell_{1,k} \\ -k_{2,k} & 1 & 0 \\ -\ell_{2,k} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$/5.57/ \quad \underline{D}_k, \underline{D}_{k,k+1}, \underline{\Delta}_k, \underline{\Delta}_{k,k+1} \text{ /és inverzeik/ determinánása } 1;$$

$$/5.58/ \quad \underline{D}_{k+1} = \underline{D}_{k,k+1} \underline{D}_k, \quad \underline{\Delta}_{k+1} = \underline{\Delta}_{k,k+1} \underline{\Delta}_k$$

$$/5.59/ \quad \underline{D}_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_{2,k} + \ell_{2,k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{1,k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D}_{k,k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\ell_{1,k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(k_{2,k} + \ell_{2,k}) & 1 \end{pmatrix}$$

$$/5.60/ \quad \underline{\Delta}_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \ell_{2,k} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_{2,k} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{1,k} & \ell_{1,k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$/5.60'/ \quad \underline{\Delta}_{k,k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\ell_{1,k} & -\ell_{1,k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k_{2,k} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\ell_{2,k} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Speciálisan $k=0$ mellett

$$/5.61/ \quad \begin{aligned} /a/ \quad & \tilde{\mathcal{T}}_{1,0} = \tau_{1,0}, \quad \tilde{\eta}_{2,0} = -\eta_{2,0}, \quad \tilde{\mathcal{V}}_{2,0} = -\mathcal{V}_{2,0}, \\ /b/ \quad & \tilde{\tau}_{1,0} = \tau_{1,0}, \quad \tilde{\tau}_{2,0} = -\tau_{2,0}, \end{aligned}$$

$$/5.61'/ \quad \underline{\tilde{\tau}}_0 = \begin{pmatrix} \tau_{1,0} \\ -\tau_{2,0} \end{pmatrix}, \quad \underline{\tilde{\varrho}}_0 = \begin{pmatrix} \tau_{1,0} \\ -\tau_{2,0} \end{pmatrix},$$

$$/5.62/ \quad \underline{\underline{D}}_0 = \underline{\underline{I}}, \quad \underline{\underline{\Delta}}_0 = \underline{\underline{I}}, \quad \text{az egységmátrixok.}$$

Bizonyítás: Az /5.42/-/5.46/ formulákat $k=-1$ értékre és az összes formulát $k=0$ mellett egyszerűen helyettesítéssel ellenőrizhetjük.

Az /5.42/ az /5.34/ definícióból nyilvánvaló. Az /5.44/ következik az /5.43/-ből, hiszen a párok bármely közös osztója osztója lenne $\frac{1}{2}$ -nek. Az /5.33/-/5.60'/ mátrixokra vonatkozó állítások egyszerűen ellenőrizhetők az /5.38/-/5.41/ definíciók alapján. Az inverzeket szorzással ellenőrizhetjük, a determinánsokat kiszámíthatjuk és azonosan 1-et nyerünk, az /5.58/-/5.60'/ szorzatokat pedig végrehajtással beláthatjuk. Az /5.43/, /5.45/-/5.52/ összefüggéseket az /5.30/-/5.33/ definíciók alapján teljes indukcióval igazolhatjuk. Ez szinte teljesen formális, ezért leírniuk felesleges.

Q.e.d.

1. Megjegyzés: A 4.2 pontban definiált \mathfrak{D} -operátor nem speciális esete a most tárgyalt Δ -operátornak. Azonban az /5.12/ definícióban $k_{2,k} = 0$ kikötéssel élve könnyű látni, hogy minden formulánk definíciója megengedett marad és a 4.2 pontbeli formulákat szolgáltatják. Vagyis $k_{2,k}=0$ kikötéssel a Δ -operátor definíciója éppen a \mathfrak{D} -operátort definiálná és az összefüggések átmennének a \mathfrak{D} -operátornál látott összefüggésekbe.

2. Megjegyzés: Anélkül, hogy ennek elemzését elvégeznénk, megjegyezzük, hogy a $\underline{\Delta}$ jelű mátrix utolsó két sorát összeadva az utolsó két oszlop azonossá válik és az utolsó elhagyásával mindig a megfelelő \underline{D} jelű mátrixot kapjuk. Ez természetesen a $\tilde{\tau}_{2,k} = \tilde{\tau}_{2,k} + \tilde{\tau}_{2,k}$ összefüggéssel szoros kapcsolatban álló tény. E megfigyelés jelentősége a Δ -redukció és a $\xi_0 = \tau_{1,0}/\tau_{2,0}$ szám lánc törtfejtésének kapcsolatánál növekedne meg.

5.9. Lemma: Bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció esetén a

$$Q_0 \doteq Q, \quad Q_k \doteq \Delta^k Q_0, \quad Q_{k+1} \doteq \Delta Q_k, \quad k=0,1,\dots,$$

konfigurációk paramétereit között fennállnak a következő összefüggések:

$$/5.61/ \quad \tilde{Q}_{k+1} = \underline{\Delta}_{k,k+1} \tilde{Q}_k, \quad \tilde{Q}_k = \underline{\Delta}_{k,k+1}^{-1} \tilde{Q}_{k+1}$$

$$/5.62/ \quad \tilde{\tau}_{k+1} = \underline{D}_{k,k+1} \tilde{\tau}_k, \quad \tilde{\tau}_k = \underline{D}_{k,k+1}^{-1} \tilde{\tau}_{k+1}$$

$$/5.63/ \quad \tilde{Q}_k = \underline{\Delta}_k \tilde{Q}_0, \quad \tilde{Q}_0 = \underline{\Delta}_k^{-1} \tilde{Q}_k$$

$$/5.64/ \quad \tilde{\tau}_k = \underline{D}_k \tilde{\tau}_0, \quad \tilde{\tau}_0 = \underline{D}_k^{-1} \tilde{\tau}_k.$$

Bizonyítás: A második oszlopban álló összefüggések ekvivalensek az első oszlopban állókkal, csupán az inverz mátrixok szerepének kiemelésére irtuk fel. Az /5.63/ és /5.64/ összefüggések következnek az /5.58/ és az /5.61/, ill. /5.62/ összefüggésekből teljes indukcióval. Csupán $k=0$ -ra kell igazolni. Ez azonban triviális /5.60/ következtében. Végülis tehát csupán az /5.61/ és /5.62/ bizonyítása maradt. Azonban ezek is könnyen beláthatók az /5.28'/ és /5.29'/ összefüggé-

sekből, ha azokban az /5.35/ és /5.36/-ból kifejezett $\tilde{\eta}_{1,k}, \eta_{2,k}, \tilde{\eta}_{2,k}, \tau_{1,k}, \tau_{2,k}$ és a /k+1/ -re felírt $\tilde{\eta}_{1,k+1}, \eta_{2,k+1}, \tilde{\eta}_{2,k+1}, \tau_{1,k+1}, \tau_{2,k+1}$ mennyiségek formuláit helyettesítjük. Ekkor ugyanis az /5.61/ és /5.62/ komponensei kifejtett alakját nyerjük. Például az /5.28'/ alatti utolsó formulából /5.35/ felhasználásával

$$\begin{aligned} & -\tilde{\eta}_{2,k+1}(B'_{2k+1} - D'_{2k+1})\eta_1 = -l_{2,k}\eta_1 - l_{2,k}(\tilde{\eta}_{1,k} - B'_{2k-2}\eta) + \\ & + l_{1,k}l_{2,k}(-\tilde{\eta}_{2,k} + D'_{2k-1}\eta_1) + (l_{1,k}l_{2,k+1})\tilde{\eta}_{2,k}(B'_{2k-1} - D'_{2k-1})\eta_1 = \\ & = (-l_{2,k} + l_{2,k}B'_{2k-2} + l_{1,k}l_{2,k}D'_{2k-1} + (l_{1,k}l_{2,k+1})(B'_{2k-1} - D'_{2k-1}))\eta_1 - \\ & - l_{2,k}\tilde{\eta}_{1,k} - l_{1,k}l_{2,k}\tilde{\eta}_{2,k} - (l_{1,k}l_{2,k+1})\tilde{\eta}_{2,k}. \end{aligned}$$

Az η_1 együtthatója az /5.32/ és /5.33/ definíciók felhasználásával

$$\begin{aligned} & -l_{2,k} + l_{2,k}(B'_{2k-2} + l_{1,k}B'_{2k-1}) + B'_{2k-1} - D'_{2k-1} \doteq \\ & \doteq -l_{2,k} + l_{2,k}B'_{2k} + B'_{2k-1} - D'_{2k-1} \doteq B'_{2k+1} - l_{2,k}B'_{2k} - D'_{2k-1} \doteq \\ & \doteq B'_{2k+1} - D'_{2k+1}. \end{aligned}$$

Ezt figyelembevéve a fenti egyenlőségből

$$\tilde{\eta}_{2,k+1} = l_{2,k}\tilde{\eta}_{1,k} + l_{1,k}l_{2,k}\tilde{\eta}_{2,k} + (l_{1,k}l_{2,k+1})\tilde{\eta}_{2,k}$$

adódik, amely az /5.41/ alatti $\underline{\Delta}_{k,k+1}$ mátrix harmadik sorát igazolja.

Q.e.d.

Megjegyzés: Bár a Δ operátor nem általánosítása a \mathcal{D} operátornak, mégis sok analógia mutatkozik a két redukcióval kapcsolatosan fellépő mennyiségek és azok összefüggései között. Így pl. ha (λ) sorozat játssza a 4.2. pontbeli (l) sorozat szerepét, akkor az $(A), (B)$ sorozatok definíciója azonos, a $D_{k,k+1}, D_{k,k}, D_{k,k+1}^{-1}, D_{k,k}^{-1}$ mátrixok formailag teljesen azonosak, és az /5.62/ és /5.64/ összefüggések azonosak a /4.57/, /4.57'/ összefüggésekkel.

Használjuk a továbbiakban a ν jelölést egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció Δ -összetettségi fokára és

$$Q^* \doteq Q_\nu \doteq \Delta^\nu Q$$

jelöléseket a Q redukáltjára / Δ -redukáltájára!/. A Q^* paramétereit $Q^* = / \eta_1^*; \mathfrak{J}_1^*; \eta_2^*; \mathfrak{J}_2^* /$ jelöli.

5.2. Az R_{12} ütemtervek és a Δ -redukció.

Az előző pontban bevezetett Δ -redukció célja az R_{12} ütemtervek vizsgálatának visszavezetése egyszerűbb konfigurációk ütemterveinek vizsgálatára. Ezt a $Q_k = \Delta^k Q$, $k=0,1,\dots$, konfigurációk R_{12} ütemterveinek jellemzői között fennálló összefüggések teszik lehetővé.

Be fogjuk látni, hogy az $R_{12}(Q_k)$, $k=0,1,\dots$, ütemtervek egyszerre periodikusak és jellemzőik az /5.3o/-/5.4l/ mennyiségek segítségével összefüggésbe hozhatók.

Először meghatározzuk egy $R_{12}(Q)$ periodushosszának és P_A -foglaltságának általános paraméteres alakját és a paramétereket, mint az ütemterv jellemzőit vezetjük be. E jellemzők összefüggéseit határozzuk azután meg a (Q) sorozat ütemtervei között.

5.1. Tétel:

/A/ Ha a $Q \in \mathbb{Q}$ konfigurációra

$$\tau_1 \tau_2 > 0,$$

akkor periodikus $R \doteq R_{1,2}(Q)$ ütemtervénél a periodushossz

$$/5.65/ \quad p = \mu_1 \tau_1 = \mu_2 \tau_2 + (\kappa_2 + \varepsilon_2) \eta_1$$

és a P_A -foglaltság

$$/5.66/ \quad a = \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2$$

alakba írhatók fel, ahol

$$\mu_1 > 0, \quad \mu_2 \geq 0 \quad \text{egészek,}$$

a periodusonként kiszolgált ciklusok száma,

$$\kappa_2 \geq 0 \quad \text{egész,}$$

a periodusonkénti megszakítások száma, és

$$0 \leq \varepsilon_2 \leq 1$$

a $Q^{(2)}$ job-folyam megszakításokon felüli késleltetését jellemzi. Ezek az R periodikus ütemterv

$$\Pi \doteq / \mu_1; \mu_2; \kappa_2; \varepsilon_2 /$$

jellemzői.

/B/ Ha még

$$\eta_1 > 0$$

is fennáll, akkor $\mu_2 > 0$ is teljesül.

/C/ Ha

$$\eta_1 > 0, \quad \eta_1 = 0, \quad \tau_2 \geq 0,$$

akkor R mindig periodikus

$$\Pi = /1; 0; 0; 1/$$

jellemzőkkel.

/D/ A /C/ eset kivételével

$$\tau_1 \tau_2 = 0$$

mellett az /5.65/ és /5.66/ a 3. Fejezet 2. Megállapodásába foglalt megszorítás nélküli $R_{12}(Q)$ ütemterv jellemzőit szolgáltatja, amelyre $p=a=0$. $R_{12}(Q)$ a 2. Megállapodás mellett is periodikus, de az /5.65/ és /5.66/ korrigálandók a

$\tau_1 + \tau_2$, illetve $\eta_1 + \eta_2$
additív taggal.

Bizonyítás:

/A/: Abszolút prioritása miatt a $Q^{(1)}$ job-folyam nem késleltetődik, ezért a periodushossz csak τ_1 egész többszöröse lehet. Ez igazolja az /5.65/ baloldalát. A 3.10. Lemma szerint a $Q^{(2)}$ job-folyamnak is $\mu_2 \geq 0$ egész számú C_2 igényciklusa kerül kiszolgálásra periodusonként. A $Q^{(2)}$ azonban késleltetve is lehet, mégpedig két okból: megszakítás miatt, vagy azért, mert egy B_2 -task végződésekor P_A foglalt, vagy azt $Q^{(1)}$ igényli. Az első késleltetés $\kappa_2 \eta_1$ alakú, a második $\varepsilon_2 \eta_1$ alakú, ahol $0 < \varepsilon_2 \leq 1$. Az utóbbi késleltetéskor azonban a következő A_1 -task végződésénél $\vartheta_1 > 0$ esetén β_1 -szituáció alakul ki, ami a 3.4. Lemma szerint periodusonként csak egyszer lehetséges. Ha $\vartheta_1 = 0$, akkor $Q^{(2)}$ kiszorul az ütemezésből, mert $\eta_1 > 0$ miatt $Q^{(1)}$ mindig igényli a P_A processzort. Ilyenkor a periodushossz η_1 és $Q^{(2)}$ periodusonként η_1 késleltetést szenved. Ez megfelel az $\varepsilon_2 = 1$ értéknek. Ekkor nyilván $\mu_2 = 0$, $\kappa_2 = 0$. Ezzel egyszerre bizonyítottuk a /C/ állítást is. Ha viszont $\vartheta_1 > 0$, akkor a szorosság miatt feltétlenül ütemeződnie kell C_2 -ciklusnak is minden periodusban, ezért $\mu_2 > 0$. Ezzel beláttuk a /B/ állítást is.

Ha egy B_2 -task végződésekor $\mathcal{J}_1 > 0$ esetben éppen egy A_1 -task is végződik, akkor ebben a pontban β_1 -szituáció alakul ki. Ez azonban kizárja, hogy a periodusban késleltetés miatt még kialakuljon β_1 -szituáció, vagyis ilyenkor nincs késleltetés a megszakításokon kívül. Ezt fejezi ki az $\varepsilon_2=0$ érték. Ezzel az /5.65/ jobboldalát is igazoltuk. Az /5.66/ nyilvánvaló következménye μ_1 és μ_2 definíciójának.

/B/: Beláttuk /A/-val együtt

/C/: Beláttuk /A/-val együtt. Azt kell csak megjegyezni, hogy ehhez a $\tau_2 > 0$ tényt nem kellett kihasználni.

/D/: $\tau_1=0$ esetén a 3. Fejezet 2. Megállapodása nélkül csupán a $Q^{(1)}$ degenerált job-folyam ütemeződne, ezért $p=a=0$ és $\mu_1 = 1$. A 2. Megállapodás miatt azonban minden C_1 -ciklus után egy C_2 -ciklusnak kell ütemeződnie, ezért egy $p=\tau_2$ periodushosszú ütemtervet nyerünk $a=\gamma_2$ foglaltsággal.

$\tau_1 = \gamma_1 = 0$ miatt ezek valóban az állításnak megfelelő additív korrekcióval kaphatók meg. Az /5.65/-beli jellemzők csak

$\Pi = \langle 1; 0; 0; \varepsilon_2 \rangle$ lehetnek, ahol $\varepsilon_2=0$ önkényesen választható. Mindezek $\tau_2 = 0$ mellett is érvényesek. $\tau_1 > 0$ és $\tau_2 = 0$ esetben a /C/ esetet már igazoltuk és ott a korrekciókra nem volt szükség. $\mathcal{J}_1 > 0$ esetben azonban az első C_1 -ciklus ütemezése után, a $B_{1,1}$ task-kal párhuzamosan, már csupán a $Q^{(2)}$ degenerált job-folyam C_2 -ciklusai ütemeződnének, amely azt jelentené, hogy $\mu_1=0$, $\mu_2=1$, $\kappa_2=0$, $\varepsilon_2=0$ és $p=a=0$ – ha a 2. Megállapodástól eltekintenénk. A 2. Megállapodás miatt azonban csak egyetlen C_2 -ciklus ütemezhető C_1 -ciklus ütemezése nélkül. Vagyis $Q^{(1)}$ ütemeződik és $p=\tau_1$, $a=\gamma_1$ jellemzőket szolgáltat, amelyek az állítás szerinti korrekcióval nyerhetők.

Q.e.d.

1. Megjegyzés: Az 5.1. Tétel /A/ és /D/ esetei egybefoglalhatók a következőképpen: ha $R_{12}(Q)$ periodikus, akkor

$$/5.65'/ \quad p = \mu_1 \tau_1 + \delta(\tau_1 + \tau_2) = \mu_2 \tau_2 + (\kappa_2 + \varepsilon_2) \eta_1 + \delta(\tau_1 + \tau_2)$$

$$/5.66'/ \quad a = \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2 + \delta(\eta_1 + \eta_2),$$

ahol

$$/5.67/ \quad \delta = \begin{cases} 1 - \operatorname{sgn} \tau_1 \tau_2 & \text{az } \eta_1 > 0, \vartheta_1 = 0 \text{ kivételével} \\ 0 & \text{az } \eta_1 > 0, \vartheta_1 = 0 \text{ esetben} \end{cases}$$

és a

$$\Pi = / \mu_1; \mu_2; \kappa_2; \varepsilon_2 /$$

jellemzők olyanok, hogy a 2. Megállapodás nélkül, a korrekciós tagok nélkül szolgáltatja /5.65'/ és /5.66'/ a periodushosszat ill. P_A -foglaltságot, és a jellemzők értelmezése megfelel az 5.1. Tétel /A/ alatti értelmezéseknek.

2. Megjegyzés: Az 5.1. Tételből és bizonyításából a következő táblázatot írhatjuk fel elfajult konfigurációk ütemterve Π és δ jellemzőire.

	Feltétel	μ_1	μ_2	κ_2	ε_2	δ
/i/	$\tau_1 = 0$	1	0	0	0	1
/ii/	$\eta_1 > 0, \vartheta_1 = 0$	1	0	0	1	0
/iii/	$\vartheta_1 > 0, \tau_2 = 0$	0	1	0	0	1

3. Megjegyzés: A tétel bizonyításában kulcsszerepet játszott az a tény, hogy egy perioduson belül kétszer nem léphet fel β_1 -szituáció. Ebből következik az $\varepsilon_2 \eta_1$ additív tag az /5.65/ jobboldalán $0 \leq \varepsilon_2 \leq 1$ feltétel mellett. Az $\varepsilon_2 = 0$ megengedi a β_1 -szituáció hiányát is. Később fogjuk bizonyítani: $\vartheta_1 \tau_2 > 0$ esetben a β_1 -szituáció szükségképpen fel is lép /5.4. Tétel/.

5.10. Lemma: Ha a $Q_k \in Q$ nem-redukált konfiguráció

$$R_k \doteq R_{12}(Q_k)$$

ütemterve periodikus, akkor a

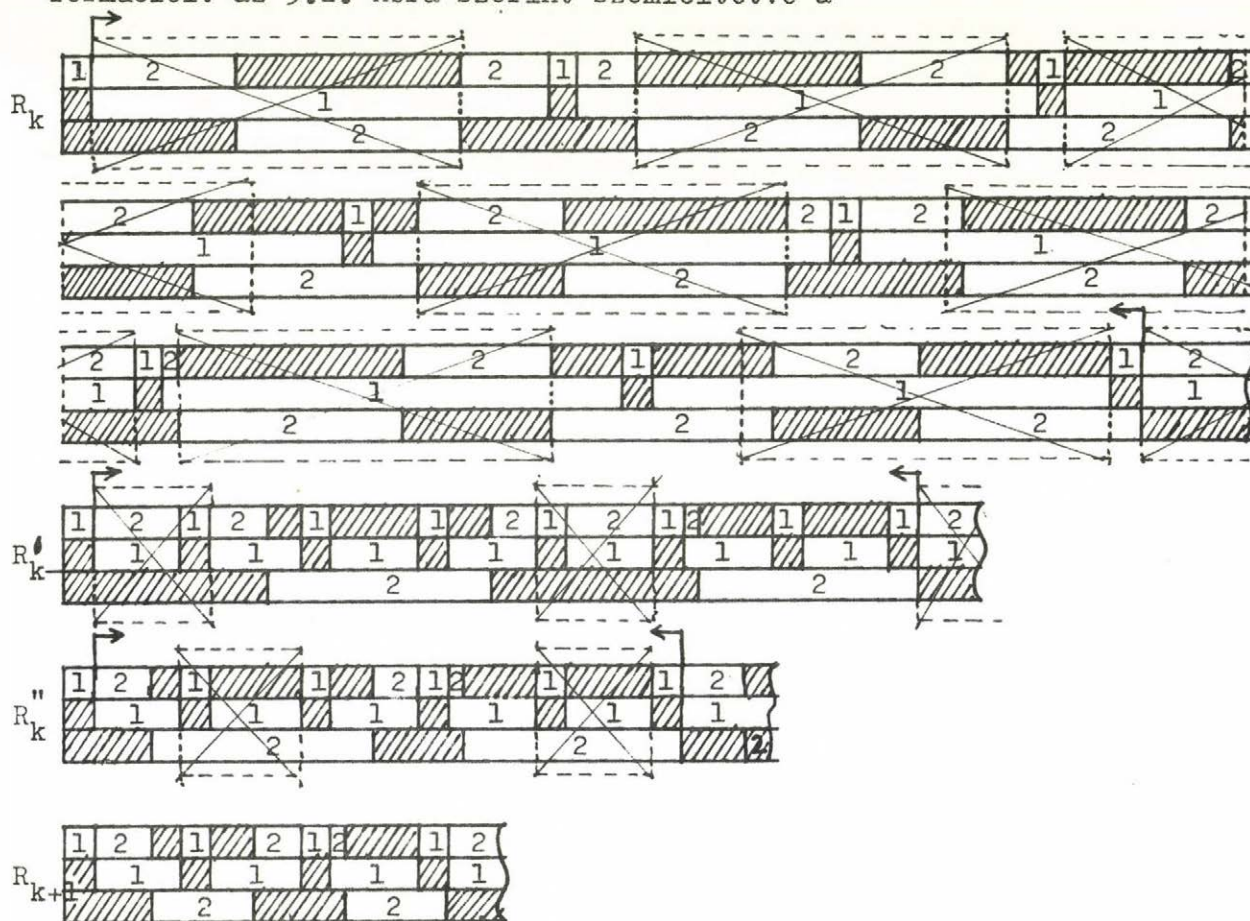
$$Q_{k+1} = \Delta Q_k$$

konfiguráció

$$R_{k+1} \doteq R_{12}(Q_{k+1})$$

ütemterve is periodikus és viszont. A két ütemterv \mathcal{E}_2 jellemzője azonos.

Bizonyítás: Az állítás nyilvánvalóvá válik, ha az /5.11/-
/5.13/ transzformációknak megfeleltetjük az ütemtervek transz-
formációit az 5.2. Ábra szerint szemlélítetve a



5.2. Ábra: A Δ -redukció hatása az R_{12} ütemtervre.

$$Q_k \xrightarrow{/5.11/} Q'_k \xrightarrow{/5.12/} Q''_k \xrightarrow{/5.13/} Q_{k+1}$$

konfigurációsorozatnak megfelelő

$$R_k \longrightarrow R'_k \longrightarrow R''_k \longrightarrow R_{k+1}$$

ütemtervsorozatot. Az $R_k \longrightarrow R'_k$ transzformáció a következő. Az R_k ütemtervben minden B_1 -task kiszolgálási szakaszból hagyjunk ki összefüggően egy $l_{1,k} \tau_{2,k}$ hosszúságú szakaszt. A szakasz így $\gamma_{1,k+1}$ hosszúságúra redukálódik. Az így nyert ütemterv lesz R'_k , a Q'_k konfiguráció R_{12} ütemterve. Nyilvánvaló, hogy R_k -val együtt R'_k is periodikus. R'_k és $l_{1,k}$ megadása esetén megfordítva megszerkeszthető egyértelműen a Q_k egy R_k ütemtervel $l_{1,k} \tau_{2,k}$ hosszúságú szakaszok beiktatásával minden B_1 -task kiszolgálási szakaszba, amely szakaszon megfelelő fázisban C_2 -task-ok és B_1 -task van ütemezve.

Az R'_k ütemterv minden A_2 -task kiszolgálási szakaszából hagyjuk ki összefüggően $k_{2,k} \tau_{1,k+1}$ hosszúságú részt. Ezzel azokat $\gamma_{2,k+1}$ vagy $\gamma_{2,k+1} + \eta$ hosszúságúra redukáljuk, megszakítás nélkülivé, vagy egy megszakításos kiszolgálási szakasszá attól függően, hogy a megszakítások száma R'_k -ben $k_{2,k}$ vagy $k_{2,k+1}$ volt. Az így nyert R''_k ütemterv periodikus és nem más, mint a Q''_k ütemterve. $k_{2,k}$ és R''_k alapján R'_k rekonstruálható egyértelműen.

Hasonlóan kapható végül R''_k ütemtervből R_{k+1} , ha a B_2 -task kiszolgálási szakaszokból $l_{2,k} \tau_{1,k+1}$ hosszúságú egybefüggő szakaszt iktatunk ki. R_{k+1} periodikus, belőle R''_k rekonstruálható és nyilvánvalóan a Q_{k+1} konfiguráció R_{12} ütemterve.

Mindezek a transzformációk érintetlenül hagyták az ütemtervek olyan szakaszait, amelyeken $Q_k^{(2)}$ nem megszakítás miatt késleltetődik, amely β_1 -szituációt előz meg. Ebből következik, hogy az ütemtervek \mathcal{E}_2 jellemzője a transzformációk közben nem változik meg.

Q.e.d.

A következő tételben a (Q) sorozat R_{12} ütemterveinek jellemzői között adunk meg összefüggést. A (Q) sorozattal definiálhatjuk az

$$R_k \doteq R_{12}(Q_k), \quad k=0,1,\dots$$

ütemtervek (R) sorozatát. Legyen

$$/5.68/ \quad \Pi_k = / \mu_{1,k}; \mu_{2,k}; \kappa_{2,k}; \varepsilon_2 / , \quad k=0,1,\dots$$

az R_k ütemterv jellemzői periodikus esetben. Szükségünk lesz még a következő mennyiségekre is:

$$/5.69/ \quad \underline{\mu}_k = \begin{pmatrix} \mu_{1,k} \\ \mu_{2,k} \end{pmatrix}, \quad \underline{\pi}_k = \begin{pmatrix} \mu_{1,k} \\ \mu_{2,k} \\ \kappa_{2,k} \end{pmatrix}, \quad k=0,1,\dots$$

vektorokra és az

$$/5.70/ \quad \underline{M}_k = \begin{pmatrix} A_{2k-1} & -B_{2k-1} & 0 \\ -A_{2k-2} & B_{2k-2} & 0 \\ C_{2k-1} & -D_{2k-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad k=0,1,\dots$$

$$/5.71/ \quad \underline{M}_{k,k+1} = \begin{pmatrix} \ell_{1,k}(k_{2,k} + \ell_{2,k}) + 1 & -(k_{2,k} + \ell_{2,k}) & 0 \\ -\ell_{1,k} & 1 & 0 \\ \ell_{1,k} k_{2,k} & -k_{2,k} & 1 \end{pmatrix},$$

$$k=0,1,\dots$$

mátrixokra.

A tétel előtt egy lemmát bizonyítunk a most definiált mátrixokra vonatkozóan.

5.11. Lemma: Az /5.70/ és /5.71/ mátrixokra vonatkozóan igazak a következők:

$$/5.72/ \quad \underline{M}_0 = \underline{I}, \quad \underline{M}_{k+1} = \underline{M}_{k,k+1} \underline{M}_k, \quad k=0,1,\dots$$

$$/5.70'/ \quad \underline{M}_k^{-1} = \begin{pmatrix} B_{2k-2} & B_{2k-1} & 0 \\ A_{2k-2} & A_{2k-1} & 0 \\ B_{2k-2}' & B_{2k-1}' & 1 \end{pmatrix}$$

$$/5.71'/ \quad \underline{M}_{k,k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & k_{2,k} + l_{2,k} & 0 \\ l_{1,k} & l_{1,k}(k_{2,k} + l_{2,k}) + 1 & 0 \\ 0 & k_{2,k} & 1 \end{pmatrix}$$

$$/5.73/ \quad \underline{M}_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & -l_{2,k} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -k_{2,k} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_{2,k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{1,k} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$/5.73'/ \quad \underline{M}_{k,k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{1,k} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k_{2,k} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_{2,k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{2,k} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$/5.74/ \quad \underline{M}_k, \underline{M}_{k,k+1} \text{ és a fent fellépő bármelyik mátrix determinánása } 1.$$

Bizonyítás: Az állításokat a mátrix-szorítások elvégzésével, illetve a determinánsok kifejtésével közvetlenül beláthatjuk.

Q.e.d.

5.2. Tétel: A

$$Q_k \triangleq \Delta^k Q, \quad k=0,1,\dots, \quad Q \in \mathbb{Q},$$

konfigurációk

$$R_k \triangleq R_{12}/Q_k, \quad k=0,1,\dots$$

ütemtervei egyszerre periodikusak és a

$$\Pi_k \triangleq (\mu_{1,k}; \mu_{2,k}; \kappa_{2,k}; \varepsilon_{2,k}), \quad k=0,1,\dots$$

jellemzőkre vonatkozóan igazak a következő összefüggések.

$$/5.75/ \quad \varepsilon_{2,k} \equiv \varepsilon_{2,0} \triangleq \varepsilon_2$$

$$/5.76/ \quad \pi_{k+1} = M_{k,k+1} \pi_k, \quad \pi_k = M_{k,k+1}^{-1} \pi_{k+1}$$

$$/5.77/ \quad \underline{\mu}_{k+1} = D_{k,k+1}^{-T} \underline{\mu}_k, \quad \underline{\mu}_k = D_{k,k+1}^T \underline{\mu}_{k+1}$$

$$/5.78/ \quad \pi_k = M_k \pi_0, \quad \pi_0 = M_k^{-1} \pi_k$$

$$/5.79/ \quad \underline{\mu}_k = D_k^{-T} \underline{\mu}_0, \quad \underline{\mu}_0 = D_k^T \underline{\mu}_k$$

Itt \underline{X}^T az \underline{X} mátrix transzponáltja, \underline{X}^{-T} pedig az \underline{X}^{-1} inverz transzponáltját jelöli.

Bizonyítás: Az /5.75/ az 5.10. Lemma egyik állítása. Az /5.67/ összefüggéseket az 5.10. Lemma bizonyításában értelmezett $R_k \rightarrow R'_k \rightarrow R''_k \rightarrow R_{k+1}$ transzformációsorozat alapján a következőképpen láthatjuk be. Legyenek $\Pi_k, \Pi'_k, \Pi''_k, \Pi_{k+1}$ a megfelelő jellemzők. Az $R_k \rightarrow R'_k$ transzformációval a C_2 -ciklusok száma csökken B_1 -task-onként $\ell_{1,k}$ -val, vagyis összesen $\ell_{1,k} \mu_{1,k}$ -val. A C_1 -ciklusok, valamint a megszakítások száma változatlan. Vagyis

$$/5.80/ \quad \mu'_{1,k} = \mu_{1,k}, \quad \mu'_{2,k} = \mu_{2,k} - \ell_{1,k} \mu_{1,k}, \quad \kappa'_{2,k} = \kappa_{2,k}.$$

Az $R'_k \rightarrow R''_k$ transzformációnál a C_1 -ciklusok száma A_2 -task-onként $\kappa_{2,k}$ -val, összesen $\kappa_{2,k} \mu'_{2,k}$ -vel csökken. Minden eliminált C_1 -ciklus pontosan egy megszakítást okoz.

zott. Ezért a megszakítások száma is ennyivel csökken. A C_2 -ciklusok száma változatlan. Vagyis

$$/5.80'/ \quad \mu_{1,k}'' = \mu_{1,k}' - k_{2,k} \mu_{2,k}', \quad \mu_{2,k}'' = \mu_{2,k}', \quad \kappa_{2,k}'' = \kappa_{2,k}' - k_{2,k} \mu_{2,k}'.$$

Az $R_k'' \rightarrow R_{k+1}$ transzformáció nál ismét a C_1 -ciklusok száma csökken B_2 -task-onként $\ell_{2,k}$ -val, összesen $\ell_{2,k} \mu_{2,k}''$ -vel. E ciklusok egyike sem okozott megszakítást, ezért a C_2 -ciklusok és megszakítások száma is változatlan. Vagyis

$$/5.80''/ \quad \mu_{1,k+1}'' = \mu_{1,k}'' - \ell_{2,k} \mu_{2,k}'', \quad \mu_{2,k+1}'' = \mu_{2,k}'', \quad \kappa_{2,k+1}'' = \kappa_{2,k}''.$$

Az $/5.80/-/5.80''/$ transzformációk mátrixai nem egyebek, mint az $\underline{M}_{k,k+1}$ mátrix $/5.73/$ alatti tényezői jobbról-balra sorrendben. Az összevont $\pi_k \rightarrow \pi_{k+1}$ transzformáció mátrixa tehát valóban $\underline{M}_{k,k+1}$. Ebből következik hogy a $\pi_{k+1} \rightarrow \pi_k$ inverz transzformáció mátrixa $\underline{M}_{k,k+1}^{-1}$. Ezzel $/5.76/-$ ot igazoltuk.

$\underline{M}_0 = \underline{I}$ és $/5.76/$ alapján teljes indukcióval azonnal adódik $/5.78/$.

Összehasonlítva az $\underline{M}_{k,k+1}$ bal-felső sarok mátrixát az $/5.55/$ alatti $\underline{D}_{k,k+1}^{-1}$ mátrixszal, látható, hogy az az utóbbi transzponáltja, vagyis $\underline{D}_{k,k+1}^{-T}$. Ebből és $/5.76/-$ ből $/5.77/$ már következik, hiszen $\underline{\mu}_k$ a π_k vektor első két komponenséből áll. Az $/5.62/$ szerint $\underline{D}_0 = \underline{I}$, amiből $/5.77/$ alapján teljes indukcióval az $/5.79/$ következik.

Q.e.d.

Ez a tétel lehetővé teszi bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció

$R \triangleq R_{12} / Q /$ ütemterve jellemzőinek meghatározását, ha R periodikus és Q Δ -redukálható. Ha ugyanis $\Pi^* = / \mu_1^*; \mu_2^*; \kappa_2^*; \varepsilon_2^* /$ a Q^* redukált konfiguráció R^* ütemtervének jellemzői, akkor az R ütemterv $\Pi = / \mu_1; \mu_2; \kappa_2; \varepsilon_2 /$ jellemzői az $/5.75/$ és $/5.78/$ alapján kiszámíthatók:

$$\pi = \underline{M}^{-1} \pi^*, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^*,$$

ahol \vee a Q Δ -összetettségi foka.

Ez a tény adja meg a periodicitás és a Δ -redukálhatóság kérdéseinek fontosságát. Ezenkívül szükségessé teszi redukált konfigurációk ütemtervei jellemzőinek meghatározását.

Ezekkel a kérdésekkel foglalkozunk a következő pontban.

5.3. Speciális konfigurációk R_{12} ütemtervei

Általánosságban nem tudjuk megválaszolni, hogy egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció R_{12} ütemterve mikor periodikus és, hogy Q mikor Δ -redukálható. Sőt látni fogjuk, hogy minden Δ -redukált Q^* konfiguráció $R^* = R_{12}(Q^*)$ ütemtervéről sem tudjuk eldönteni véges lépésben, hogy periodikus-e, és ha periodikus, mik a jellemzői. A következő pontban adni fogunk olyan algoritmust, amely minden periodikus R_{12} ütemterv jellemzőit véges lépésben megadja, de éppen ez lesz R_{12} periodicitásának ismérve. Az algoritmus végességére általános kritériumot nem sikerül adni.

Éppen emiatt fontosak az olyan részeredmények, amelyek bizonyos speciális konfigurációkra tisztázzák a választ a fenti nyitott kérdésekre. Bizonyos eredményeket már az 5.1. pontban is kaptunk. Azokra hivatkozni fogunk.

Vizsgálatainkból most kirekesztjük a degenerált konfigurációkat és az

$$\eta_1 > 0, \quad \vartheta_1 = 0$$

esetet. Ezeket a

$$\vartheta_1 \tau_2 = 0$$

feltétel foglalja egybe. Feltételezzük tehát most, hogy a

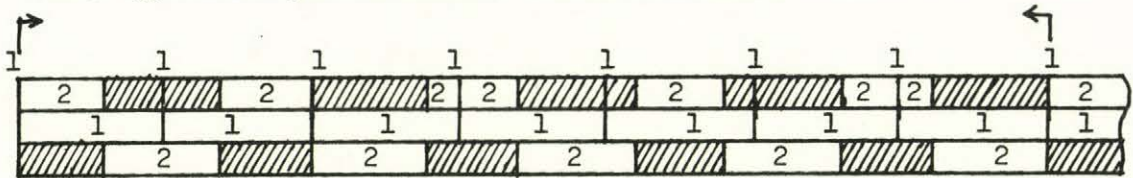
$$/5.81/ \quad \vartheta_1 \tau_2 > 0$$

feltétel teljesül.

Először két fontos speciális esetet tárgyalunk, amely-nél

$$\eta_1 = 0, \text{ vagy } \vartheta_2 = 0.$$

Ha $\eta_1 = 0$, akkor az R_{12} ütemtervben a megszakításoktól függetlenül a $Q^{(1)}$ job-folyam nem késlelteti a $Q^{(2)}$ job-folyamot. Ezt az 5.3. Ábra Gantt-diagrammja szemlélteti. Egy bármilyen szituáció visszatérésének



5.3. Ábra: Az $\eta_1 = 0$, $\vartheta_1 > 0$ speciális konfiguráció R_{12} ütemterve.

a feltétele az, hogy legyenek A és B egészek, amelyekre

$$B \vartheta_1 = A \tau_2$$

teljesül. Az első visszatérési időt a legkisebb A, B szolgáltatója, amelyek nyilván relatív primek. A 3.8. Lemma szerint R_{12} periodicitásának feltétele a visszatérő szituáció, amelynek feltétele viszont ezek szerint ϑ_1 és τ_2 racionális függősége. $\vartheta_1 \tau_2 > 0$ miatt A, B csak azonos előjelűek lehetnek, ezért

$$\xi = \frac{\vartheta_1}{\tau_2} = \frac{A}{B}, \quad A, B > 0 \text{ relatív primek},$$

egy véges pozitív racionális szám. Ennek fennállásakor R_{12} periodushossza

$$p = B \vartheta_1 = A \tau_2$$

vagyis

$$\mu_1 = B, \quad \mu_2 = A.$$

Határozzuk meg a \mathcal{K}_2 jellemzőt, a megszakítások számát.

Egy $A_{1,k}$ task akkor és csak akkor okoz megszakítást, ha valamely $k \geq 0$ egészre

$$l\tau_2 < k\mathcal{J}_1 < l\tau_2 + \eta_2,$$

vagyis

$$l < k \frac{\mathcal{J}_1}{\tau_2} < l + \frac{\eta_2}{\tau_2},$$

vagyis

$$\left\{ k \frac{\mathcal{J}_1}{\tau_2} \right\} \in \left(0, \frac{\eta_2}{\tau_2} \right).$$

Tudjuk, hogy a $\left\{ k \frac{A}{B} \right\}$, $k=0,1,\dots$ sorozat bármely egymás utáni B tagja az $\frac{r}{B}$, $0 \leq r \leq B-1$, osztópontjait futja végig a $[0,1)$ intervallumnak. Az R_{12} egy periodusában éppen B darab $A_{1,k}$ task ütemeződik, azok közül tehát annyi okoz megszakítást, ahány $\frac{r}{B}$ alakú osztópontot tartalmaz a $(0, \eta_2/\tau_2)$ intervallum. Így tehát \mathcal{K}_2 az $\frac{\eta_2}{\tau_2} / \frac{1}{B}$ számnál kisebb egész:

$$\mathcal{K}_2 = f < \left(B \frac{\eta_2}{\tau_2} \right).$$

Az \mathcal{E}_2 értéke $\eta_1=0$ miatt közömbös. $\mathcal{E}_2=0$ lehet azért, mert nincs késleltetés és $\mathcal{E}_2=1$ lehet azért mert a késleltetés $\eta_1 \neq 0$.

Ha $\mathcal{J}_2=0$, akkor a $Q^{(2)}$ job-folyam mindig ütemezésre kész és $\eta_2 > 0$ miatt ütemeződik is P_A -ra mindig, amikor azt $Q^{(1)}$ nem igényli. Az 5.4. Ábra mutatja, hogy $R_{12}(Q)$ -nak akkor és csak akkor van visszatérő szituációja, ha valamely A és B egészekre

$$B\mathcal{J}_1 = A\eta_2$$

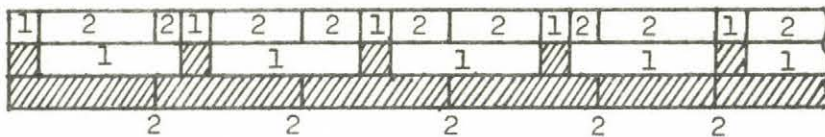
teljesül. Itt $B, A > 0$ és

$$\xi = \frac{\vartheta_1}{\eta_2} = \frac{\vartheta_1}{\tau_2} = \frac{A}{B} \quad , \quad A, B > 0 \text{ relativ primek} \quad ,$$

racionális szám. $\mu_1 = B$, $\mu_2 = A$ éppen a ciklusszámok. Minden periodusban egy kivételével a többi A_1 -task megszakítást okoz, tehát

$$\kappa_2 = B - 1 = f < \left(B \frac{\eta_2}{\tau_2} \right).$$

Most azonban $\varepsilon_2 = 1$, hiszen minden periodusban egy megszakítást nem okozó A_1 -task is késlelteti a $Q^{(2)}$ job-folyamot.



5.4. Ábra: A $\vartheta_1 \eta_2 > 0$, $\vartheta_2 = 0$ speciális konfiguráció R_{12} ütemterve.

Ezzel bizonyítottuk az alábbi lemmát.

5.12. Lemma: Ha a $Q \in \mathcal{A}$ konfigurációra a

$$/5.82/ \quad \vartheta_1 \tau_2 > 0, \quad \eta_1 \vartheta_2 = 0$$

feltételek teljesülnek, akkor az $R \doteq R_{12}(Q)$ ütemterv akkor és csak akkor periodikus, amikor

$$/5.83/ \quad \xi = \frac{\vartheta_1}{\tau_2} = \frac{A}{B} \quad , \quad A, B > 0 \text{ relativ primek},$$

racionális szám. Az R jellemzői ekkor

$$/5.84/ \quad \Pi = / B ; A ; f_{<} \left(\frac{\eta_2}{\tau_2} B \right) ; 1 / .$$

Bizonyítás: Fentebb megtörtént. $\eta_1=0$ esetben az $\varepsilon_2 = 1$ megállapodásnak tekinthető közömbös jellemző.

Q.e.d.

Vizsgáljuk meg most a Q redukálhatóságának és az $R_{12}(Q)$ ütemterv periodicitásának viszonyát. Először egy egyszerű lemmát kell bizonyítanunk.

5.13. Lemma: Ha a $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció Δ -redukálható és a Q^* redukáltjára a

$$/5.85/ \quad \eta_1^* > 0, \quad \tau_1^* \geq \tau_2^* > 0$$

feltétel teljesül, akkor $R_{12}(Q)$ periodikus

$$/5.86/ \quad \Pi = / \mu_1 ; \mu_2 ; 0 ; \frac{\tau_1^* - \tau_2^*}{\eta_1} /$$

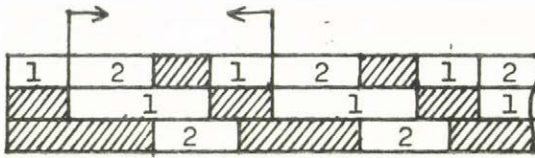
jellemzőkkel, ahol

$$/5.87/ \quad \begin{aligned} \mu_1 &= B_{2v-2} + B_{2v-1} \\ \mu_2 &= A_{2v-2} + A_{2v-1} \end{aligned}$$

és v a Q konfiguráció Δ -összetettségi foka /véges!/.

Bizonyítás: Először is az /5.85/ kizárja, hogy $\eta_1=0$ legyen, hiszen $\eta_1^* \geq \tau_2^* > 0$ ellentmondana a redukáltság /5.15/ feltételének. Az alábbi illusztráció mutatja, hogy az $R^* = R_{12}(Q^*)$ ütemterv jellemzői

$$\Pi^* = / 1 ; 1 ; 0 ; \frac{\tau_1^* - \tau_2^*}{\eta_1} / .$$



Az /5.38/ és /5.69/ definíciókat figyelembe véve az 5.2. Tétel /5.79/ formulájából

$$\begin{aligned}\mu_1 &= B_{2v-2} \mu_1^* + B_{2v-1} \mu_2^* \\ \mu_2 &= A_{2v-2} \mu_1^* + A_{2v-1} \mu_2^* .\end{aligned}$$

Ebből /5.87/ következik.

Q.e.d.

5.3. Tétel: Egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció $R_{12}(Q)$ ütemterve akkor és csak akkor periodikus, ha a Q Δ -redukálható, kivéve esetleg a redukálhatóság azon eseteit, amelyekben a Q^* redukált konfigurációra

$$/5.88/ \quad 0 < \tau_1^* < \tau_2^*$$

teljesül. Ilyenkor az $R_{12}(Q)$ periodicitása nem bizonyított.

$\eta_2 = 0$ mellett az utóbbi kivételes eset kizárt.

Bizonyítás: Az 5.1. Tétel utáni 2. Megjegyzés szerint

$\mathcal{J}_1 \tau_2 = 0$ esetben $R_{12}(Q)$ periodikus. Ekkor azonban nyilvánvalóan Q vagy redukált, vagy redukálható /csupán a $\mathcal{J}_1 = 0$, $\mathcal{J}_2 \geq \eta_1 > 0$ a nem redukált eset, amely egyetlen lépésben redukálódik/.

Tegyük fel tovább, hogy $\mathcal{J}_1 \tau_2 > 0$.

Az 5.3. Lemma szerint a Δ operátor véges $v' \geq 0$ számú alkalmazásával a nyert $Q_{v'} \doteq \Delta^{v'} Q$ konfiguráció vagy redukált, vagy $\eta_1 \vartheta_{2,v'} = 0$ /a kettő egymást nem zárja ki/. Elegendő ezért két esettel foglalkozni:

/a/ $\eta_1 \vartheta_2 = 0$, és /b/ $\eta_1^* \vartheta_2^* > 0$, ahol Q^* a redukált konfiguráció.

/a/ eset: $\vartheta_1 \tau_2 > 0$, $\eta_1 \vartheta_2 = 0$. Az 5.12. Lemma szerint az $R_{12}(Q)$ pontosan akkor periodikus, ha a $\xi \doteq \vartheta_1 / \tau_2$ egy racionális szám. Belátjuk, hogy Q pontosan akkor redukálható.

Ha $\vartheta_2 = 0$, akkor $\xi = \vartheta_1 / \eta_2$ és a Δ -redukció ekvivalens a ξ szabályos lánc törtfejtési algoritmusával, amely pontosan akkor véges, ha ξ racionális.

Ha $\vartheta_2 > 0$, $\eta_1 = 0$, akkor vizsgáljuk meg, hogy mikor nem létezik a Δ -redukált. Ilyenkor a (λ) hányados-sorozat végtelen és a

$$\vartheta_{1,k}, \eta_{2,k}, \vartheta_{2,k}$$

paraméterek közül sem a $\vartheta_{1,k}$, sem az $\eta_{2,k} + \vartheta_{2,k}$ nem válhat 0-vá, mert akkor Q_k redukált lenne. Ha $\eta_{2,k} \vartheta_{2,k} = 0$, akkor a $\xi_{2k} \doteq \vartheta_{1,k} / \tau_{2,k}$ szám irracionális kell legyen, mert a Δ -redukció a lánc törtfejtéssel lesz ekvivalens és racionális ξ_k esetén véges lenne. Az irracionáltság pedig valóban annak feltétele, hogy $R_{12}(Q)$ ne legyen periodikus.

Ha $\vartheta_{1,k} \eta_{2,k} \vartheta_{2,k} > 0$, $k=1,2,\dots$, fennáll, akkor az /5.11/ definícióból

$$\vartheta_{1,k} = \ell_{1,k} \tau_{2,k} + \vartheta_{1,k+1},$$

ahol $\ell_{1,k} > 0$ miatt

$$0 < \vartheta_{1,k+1} < \tau_{2,k} < \vartheta_{1,k}, \quad k=1,2,\dots,$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy

$$\xi_{2k} \doteq \vartheta_{1,k} / \tau_{2,k} > 1 \quad \text{és} \quad \xi_{2k+1} \doteq \tau_{2,k} / \vartheta_{1,k+1} > 1$$

következik minden k -ra. Ekkor azonban az /5.11/-/5.13/ definíciók ekvivalensek a

$\xi_k = \lambda_k + 1/\xi_{k+1}$, $0 < 1/\xi_{k+1} < 1$, $k=1,2,\dots$, definícióval, amely éppen a $\xi_0 \doteq \vartheta_{1,0}/\tau_{2,0} = \vartheta_1/\tau_2 \doteq \xi$ szám szabályos lánc törtfejtésének definíciója. Ez azonban pontosan akkor véges, ha ξ racionális és akkor végtelen, ha ξ irracionális, megfelelően az $R_{12}(Q)$ periodizációs feltételének.

Ezzel az /a/ esetben igazoltuk tételünket.

/b/ eset: $\vartheta_1^* \tau_2^* > 0$, $\eta_1 \vartheta_2^* > 0$. Ha ebben az esetben $\tau_1^* \geq \tau_2^*$, akkor az 5.13. Lemma szerint $R_{12}(Q^*)$ periodikus, ezért az 5.10. Lemma szerint $R_{12}(Q)$ is az.

Ha $\tau_1^* < \tau_2^*$, akkor az $R_{12}(Q^*)$ és $R_{12}(Q)$ periodicitásának kérdése nyitva marad. A $0 < \tau_1^* < \tau_2^*$ reláció kizárja, hogy $\eta_2 = 0$ legyen, mert akkor $\eta_2^* = 0$ mellett $0 < \tau_1^* < \vartheta_2^*$ ellentmondana a redukáltság /5.17/ feltételének. Ebből egyébként következik, hogy $\eta_1 > 0$, $\eta_2 = 0$ esetben az $R_{12}(Q)$ mindig periodikus.

Q.e.d.

Az alábbiakban az R_{12} ütemtervek egy fontos tulajdonságát mutatjuk ki, amely bizonyos értelemben az 5.1. Tétel kiegészítője. Az 5.1 Tétel implicite kihasználja azt a tényt, hogy periódikus ütemterv minden periódusában β_1 -szituáció legfeljebb egyszer léphet fel. Be fogjuk bizonyítani, hogy a β_1 -szituáció periodusonként egyszer fel is lép, ha R_{12} -ben egyáltalán fellép. Ebből következik, hogy β_1 visszatérő szituáció, ezért az előperiodus legfeljebb a β_1 -szituáció első előfordulásáig tarthat. Az

első előfordulás viszont - ha egyáltalán létezik - csak a $t = \gamma_1$ pont lehet. Ezért $T_{12} \leq \gamma_1$ teljesül az előperiodus T_{12} hosszára. Ennek következménye az, hogy periodikus R_{12} ütemtervénél a

$$P \doteq [\gamma_1, \gamma_1 + p)$$

intervallum mindig egy periodus. Ezt nevezzük első periodusnak.

Először egy lemmát bizonyítunk előkészítésül. A jelölésekre és fogalmakra nézve utalunk a 3.1. pontbeli definíciókra.

5.14. Lemma: Egy R_{12} ütemterv bármely $\delta[t]$ szituációja egyértelműen meghatározza az ütemterv megelőző szakaszát a legközelebbi β_1 -szituációig, ha ilyen van, vagy az ütemterv kezdetéig, ha β_1 -szituáció nincs, feltéve, hogy a t pont nem egy β_1 -szituációt közvetlenül megelőző $(f(B_2), f(A_1))$ szakasz pontja. Az utóbbi esetben a meghatározottság csak $\gamma_2 = 0$ mellett igaz.

Bizonyítás: Az S_{12} ütemezési stratégia következetessége miatt az R_{12} ütemterv $t' \geq t$ szakaszát egyértelműen meghatározza a t pontbeli $\{\delta\}_t$ szituációja.

A $Q^{(1)}$ job-folyam abszolút prioritása miatt zavartalanul ütemeződik, tehát a $Q^{(1)}$ szituációja bármely t' pontban a t' által meghatározott /eltekintve esetleges 0-igényű elfajult task-ok ütemezésétől/. Ez azt jelenti, hogy $\{\delta\}_t$ ismeretében $Q^{(1)}$ szituációja meghatározott bármely $t' \geq t$ pontban is. Más a helyzet azonban a $Q^{(2)}$ job-folyammal, amelyet $Q^{(1)}$ késleltethet.

Tegyük fel, hogy t nem pontja β_1 -szituációt közvetlenül megelőző $(f/B_2, f/A_1]$ intervallumnak. Az ilyen intervallumok a $Q^{(2)}$ job-folyam késleltetési szakaszai, ahol a késleltetés nem megszakítás miatt történik /az ilyen szakaszok és a β_1 -szituáció kapcsolatát az 5.1. Tétel bizonyításában vizsgáltuk/. A t ponttól visszafelé a $Q^{(2)}$ job-folyam ütemezése teljesen meghatározott megszakításaival együtt egészen a következő β_1 -szituációig, ha ilyen van. Ez a tény nyilvánvaló. A β_1 -szituáció előtt azonban a $Q^{(2)}$ ütemezését nem a szituáció, hanem a megelőző $f(B_2)$ végződési pont helye határozza meg. Az $f(B_2)$ helye a β_1 -szituáció helyének ismeretében egyértelműen meghatározott; η_1 -gyel korábbi pont akkor, ha $\vartheta_2 = 0$, hiszen ekkor B_2 nem végződhet egy A_1 -task-kal párhuzamosan. A $\vartheta_2 = 0$ esetet tehát igazoltuk. Legyen tovább $\vartheta_2 > 0$. $(f/B_2, f/A_1]$ típusú intervallum, ahol $f(B_2) \leq f(A_1)$ és $f(B_2)$ a legutolsó ilyen pont, egyáltalán nem létezik akkor, ha $\eta_1 = 0$, hiszen a β_1 -szituációban egy A_2 -task kezdődik, ezért $f(B_2) < f(A_1)$ esetén az intervallumban P_A processzor tétlen lenne és R_{12} nem lenne szoros. $\eta_1 = 0$ esetben tehát az állítás ekvivalens azzal, hogy R_{12} -t bármely t pontbeli szituációja meghatározza, ami nyilvánvaló. Legyen tehát $\eta_1 > 0$.

$\vartheta_1 = 0$ esetben az R_{12} -ben egyáltalán nincs β_1 -szituáció, ezért az állítás ismét a teljes meghatározottsággal ekvivalens. Tekintve, hogy ekkor $Q^{(2)}$ egyáltalán nem ütemeződik, az állítás igaz. Végülis maradt még bizonyítani az $\eta_1 \vartheta_1 \vartheta_2 > 0$ eset, ahol a $t = \eta_1$ pontban biztosan fellép a β_1 -szituáció. Ezenkívül, ha bárhol fellép a β_1 -szituáció egy $f(A_1)$ pontban, akkor az előző $f(B_2)$ pont az $[f(A_1) - \eta_1, f(A_1)]$ intervallumban eshet bárhova /legalábbis, ha $\vartheta_2 \geq \eta_1/$, ezért a R_{12} ütemterv $t' < t$ része a $\delta[t]$ szituációval nincs egyértelműen meghatározva. Ezzel a lemma teljesen bizonyítva van.

Q.e.d.

5.4. Tétel: Periodikus R_{12} ütemtervben az előperiódus hosszára

$$/5.89/ \quad T_{12} \leq \tau_1$$

és $\tau_1 > 0$ esetén, és csak akkor, abban a β_1 -szituáció fel-
lép és visszatérő.

Bizonyítás: Az R_{12} ütemtervek tulajdonságait $\tau_1 \tau_2 = 0$
elfajult esetekben közvetlenül ellenőrizhetjük. Ebből nyil-
vánvaló, hogy $\tau_1 = 0$ esetén $T_{12} = 0 \leq \tau_1$ és a β_1 -
szituáció egyáltalán nem lép fel. $\tau_1 > 0$ és $\tau_2 = 0$ esetben
a 3. Fejezet 2. Megállapodása mellett C_1 -ciklusok is folya-
matosan ütemeződnek és a szorosság miatt minden A_1 -task u-
tán egy C_2 -ciklus is ütemeződik és β_1 -szituáció lép fel pe-
riódikusan. Tegyük fel tehát, hogy $\tau_1 \tau_2 > 0$. A szorosság
miatt a $t = \tau_1$ pontban biztosan fellép a β_1 -szituáció. Ha
 β_1 visszatérő, akkor az előperiódus nem tarthat tovább az
első β_1 -szituációnál, tehát $T_{12} \leq \tau_1$.

Tegyük fel most az állítással ellentétben, hogy a β_1
nem visszatérő. Ekkor az 5.14. Lemma szerint az R_{12} $t \geq \tau_1$
szakaszát bármely $t > \tau_1$ pontbeli szituáció egyértelműen
meghatározza. A következetesség miatt ekkor ez a teljes sza-
kasz periodikus kell, hogy legyen, ha R_{12} egyáltalán perio-
dikus. Vagyis $T_{12} \leq \tau_1$ ismét igaz és a $t = \tau_1$ pontja a periodi-
kus résznek. Ekkor viszont a β_1 -szituáció periodikusan
vissza kell térjen, feltevésükkel ellentétben.

Q.e.d.

Ebből a tételből és a már korábban említett következmé-
nyeiből egy periodikus R_{12} ütemterv Π jellemzőire vonat-
kozóan még további megállapításokat tehetünk, illetve azo-
kat egyszerűbben láthatjuk be. Rögtön megemlítjük, hogy a

tétel következményeként $\vartheta_1 > 0$ esetén a P első periodus mindig egy β_1 -szituációval végződik a $t = \eta_1 + p$ pontban és az utolsó $f(B_2)$ pont a $[p, p + \eta_1]$ intervallumba esik, azaz

$$/5.90/ \quad p \leq f(B_2, \mu_2) \leq p + \eta_1 .$$

Az alábbiakban néhány relációt írunk fel periodikus $R_{12}(Q)$ ütemtervek $\Pi = / \mu_1; \mu_2; \kappa_2; \varepsilon_2 /$ jellemzőire vonatkozóan. Ezt megelőzően vezessünk be néhány egyszerű definíciót.

Mondjuk azt, hogy az A task a B task-kal párhuzamosan indul, ha

$$s(B) \leq s(A) \leq f(B)$$

teljesül, ahol $s(X)$ és $f(X)$ az X task kiszolgálásának kezdete és vége. Mondjuk azt, hogy A a B-vel párhuzamosan fut le, ha

$$s(B) \leq s(A) \text{ és } f(A) \leq f(B) .$$

Jelölje u az ütemterv egy periodusában azoknak az A_1 -task-oknak a számát, amelyek nem okoznak megszakítást. Minden A_1 -task legfeljebb egy megszakítást okozhat, ezért nyilvánvalóan

$$/5.91/ \quad \mu_1 = \kappa_2 + u$$

fennáll. Egy A_1 -task akkor és csak akkor nem okoz megszakítást, ha egy B_2 -task-kal párhuzamosan indul és akkor és csak akkor nem okoz késleltetést, ha B_2 -task-kal párhuzamosan fut le.

5.15. Lemma: Periodikus $R_{12}(Q)$ ütemterv jellemzőire igazak az alábbi megállapítások:

$$\begin{aligned} & /a/ \quad \mu_2 \geq u, \quad \mu_2 + \kappa_2 \geq \mu_1, \quad \text{ha } \vartheta_2 < \tau_1 \\ /5.92/ \quad & /b/ \quad \mu_2 \leq u, \quad \mu_2 + \kappa_2 \leq \mu_1, \quad \text{ha } \vartheta_1 \leq \vartheta_2 \\ & /c/ \quad \mu_2 = u, \quad \mu_2 + \kappa_2 = \mu_1, \quad \text{ha } \vartheta_1 \leq \vartheta_2 < \tau_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & /a/ \quad \mu_1 \geq \mu_2 + 1, \quad \text{ha } \tau_1 < \tau_2 \\ /5.93/ \quad & /b/ \quad \mu_2 \geq \kappa_2 + 1, \quad \text{ha } \eta_2 \leq \vartheta_1, \quad \vartheta_1 > 0 \\ & /c/ \quad \mu_1 > \mu_2 > \kappa_2 \geq 0, \quad \text{ha } \eta_2 \leq \vartheta_1 \leq \tau_1 < \tau_2, \quad \vartheta_1 > 0, \end{aligned}$$

$$/5.94/ \quad \kappa_2 \geq 1, \quad \text{ha } \vartheta_2 < \tau_1 < \tau_2, \quad \vartheta_1 > 0$$

$$/5.95/ \quad \mu_1 \geq 3, \quad \mu_2 \geq 2, \quad \kappa_2 \geq 1, \quad \text{ha } \eta_2 \leq \vartheta_1, \quad \vartheta_1 > 0, \quad \vartheta_2 < \tau_1 < \tau_2$$

$$/5.96/ \quad \mu_1 = \mu_2 + \kappa_2 \quad \text{akkor és csak akkor, ha minden } B_2\text{-task-kal párhuzamosan pontosan egy } A_1\text{-task indul.}$$

Bizonyítás: $\vartheta_2 < \tau_1$ esetén bármely B_2 -task-kal párhuzamosan legfeljebb egy A_1 -task indulhat, tehát $u \leq \mu_2$. /5.91/ figyelembevételével /5.92/a/ bizonyított. Ha $\vartheta_2 \geq \vartheta_1$, akkor biztosan minden B_2 task-kal párhuzamosan kell indulnia A_1 -tasknak, ami nem okoz megszakítást, ezért $u \geq \mu_2$. /5.91/ figyelembevételével ebből /5.92/b/ következik. Az /5.92/c/ a két előző következménye.

Az /5.65¹/ előállításból a $[\mu_1 - \mu_2 / \tau_1 = \mu_2 / \tau_2 - \tau_1 / + \kappa_2 + \varepsilon_2 / \eta_1]$ egyenlőség nyerhető. Ha $\tau_2 > \tau_1 > 0$ és $\vartheta_1 > 0$, akkor $\mu_2 > 0$ és az egyenlet jobboldala pozitív. Ezért $\mu_1 > \mu_2$ feltétlenül teljesül. Ha $\vartheta_1 = 0$ és $0 < \eta_1 < \tau_2$, vagy $\tau_1 = 0$, $\tau_2 > 0$, akkor az 5.1. Tétel utáni 2. Megjegyzés táblázatából $\mu_1 = 1 > \mu_2 = 0$. Ezzel igazoltuk az /5.93/a/ állítást.

Ha $\eta_2 \leq \tau_1$, akkor egyetlen A_2 -task-ot sem szakíthat meg két A_1 -task, ezért $\kappa_2 \leq \mu_2$. Ha $\tau_1 > 0$, akkor $\eta_2 \leq \tau_1$ miatt az első A_2 -task biztosan megszakítás nélkül ütemeződik, ezért $\kappa_2 \leq \mu_2 - 1$, ami igazolja /5.93/b/ állításukat. Az /5.93/c/ az előző kettő következménye.

Az /5.94/ igazolásához az /5.90/-ből indulunk ki. A B_2, μ_2 task kezdőpontjában végződik az A_2, μ_2 task. Az $f(A_2, \mu_2)$ pontra /5.90/-ből

$$p - \tau_2 \leq f(A_2, \mu_2) \leq p + \eta_1 - \tau_2.$$

Ha $\tau_2 < \tau_1$, akkor $p - \tau_2 > p - \tau_1$. A $[p - \tau_1, p - \tau_1 + \eta_1)$ intervallumban azonban A_2 -task nem végződhet, hiszen ott A_1 -task kiszolgálása folyik, sőt $f(A_2, \mu_2) \geq p - \tau_2$ miatt $f(A_2, \mu_2) > p - \tau_1 + \eta_1 = p - \tau_1$. Ha $\tau_1 < \tau_2$, akkor $p + \eta_1 - \tau_2 < p - \tau_1 + \eta_2$, ezért $f(A_2, \mu_2) < p - \tau_1 + \eta_2$. Látjuk tehát, hogy egy A_1 -task után η_2 hosszúságú intervallumon belül végződik egy A_2 -task. Ez csak úgy lehet, ha az A_2 az A_1 előtt kezdődött és A_1 megszakította. Ezért biztosan van legalább egy megszakítás a periodusban, azaz $\kappa_2 \geq 1$. Ez igazolja /5.94/-et. Az /5.93/c/ és /5.94/ következménye az /5.95/.

Az /5.96/ feltétele nyilvánvalóan elegendő. Bizonyítjuk, hogy szükséges is. Vagyis $\mu_1 = \mu_2 + \kappa_2$ esetén nem lehet olyan B_2 -task amellyel párhuzamosan nem indul A_1 -task, vagy több A_1 -task indul. Az /5.91/ miatt $\mu_2 = u$. Ha egy B_2 -task-kal párhuzamosan két A_1 -task indulna, akkor feltétlenül $\tau_2 \geq \tau_1$ lenne. Ekkor $\tau_1 \leq \tau_2$ és minden B_2 -task-kal párhuzamosan indulna legalább egy A_1 -task. Ezért $u \geq \mu_2 + 1$ lenne, ami ellentmondás. Ha egy B_2 -task-kal párhuzamosan egyetlen A_1 -task sem indulna, akkor $\tau_2 < \tau_1$ lenne. $\tau_2 < \tau_1$ esetén azonban egyetlen B_2 -task-kal párhuzamosan sem indulhat egynél több A_1 -task, ezért $u \leq \mu_2 - 1$ lenne, ami ismét ellentmondás. Ezért valóban pontosan egy A_1 -task indul minden B_2 -vel párhuzamosan.

Ezzel mindegyik állításunkat igazoltuk.

Q.e.d.

5.4. A $0 < \tau_1^* < \tau_2^*$ eset vizsgálata.

Áttekintve az $R_{12}(Q)$ ütemtervek tulajdonságaira vonatkozó ismereteinket, kiderül, hogy a legkevesebbet az olyan redukálható konfiguráció ütemtervéről tudunk, amelynek Q^* redukáltjára a

$$0 < \tau_1^* < \tau_2^*$$

feltétel teljesül. Sem a periodicitás feltételét nem ismerjük, sem periodikus esetben a jellemzők meghatározására nincsen módszerünk. Minden más esetben, ha Q redukálható, akkor R_{12} periodikus is és jellemzőit meg tudjuk határozni. A $\vartheta_1^* \tau_2^* = 0$ esetben közvetlenül az 5.1. Tétel alapján, a $\vartheta_1^* \tau_2^* > 0$, $\eta_1^* \vartheta_2^* = 0$, ϑ_1^* / τ_2^* racionális esetben az euklideszi algoritmus segítségével, egyéb redukálható esetben R_{12}^* jellemzőiből az 5.2. Tétel segítségével. Ehhez az utóbbihoz R_{12}^* jellemzőinek ismerete szükséges.

Egy Q^* redukált konfiguráció $R^* = R_{12}(Q^*)$ ütemtervének jellemzőit $\vartheta_1^* \tau_2^* = 0$ esetben az 5.1. Tétel, $\vartheta_1^* \tau_2^* > 0$, $\tau_1^* \geq \tau_2^*$ esetben az 5.13. Lemma, $\nu = 0$ mellett, szolgáltatja. Az utóbbi a

$$\Pi^* = / 1; 1; 0; \frac{\tau_1^* - \tau_2^*}{\eta_1^*} /$$

jellemzőket eredményezi.

Az alábbiakban a $\vartheta_1^* \tau_2^* > 0$, $\tau_1^* < \tau_2^*$ esetet vizsgáljuk meg kissé az 5.15. Lemma alapján.

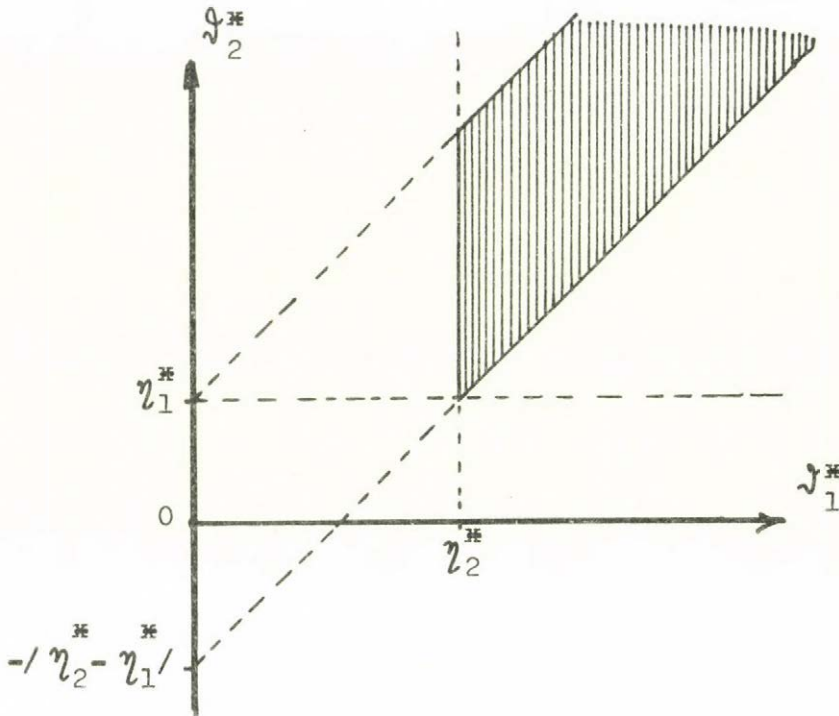
A redukáltság /5.15/-/5.17/ feltételeit is figyelembe véve most a következő feltételek teljesülnek:

$$\begin{aligned} & \vartheta_1^* > 0, \quad 0 < \tau_1^* < \tau_2^* \\ /5.97/ \quad & \vartheta_1^* < \tau_2^*, \quad \eta_2^* \leq \vartheta_1^*, \quad \vartheta_2^* < \tau_1^*. \end{aligned}$$

Ezeket két egyenlőtlenségsorba foglalhatjuk:

$$\begin{aligned} & 0 < \eta_2^* \leq \vartheta_1^* \leq \tau_1^* < \tau_2^* < \eta_2^* + \tau_1^* \\ /5.98/ \quad & 0 \leq \eta_1^* < \vartheta_2^* < \tau_1^* < \tau_2^* \leq \vartheta_1^* + \vartheta_2^*. \end{aligned}$$

Ezek az 5.5. Ábrán látható tartományt határozzák meg.



5.5. Ábra: A $0 < \tau_1^* < \tau_2^*$, $\eta_1^* > 0$ tartomány.

Az /5.98/ relációsorok nyitva hagyják az η_i^* , η_i^* , az η_1^* , η_2^* és a η_1^* , η_2^* paraméterek viszonyát, amelyek azonban nyilván nem függetlenek egymástól. Belátható például a következő implikációsor:

$$/5.99/ \quad \eta_1^* \leq \eta_1^* \Rightarrow \eta_2^* \leq \eta_1^* \Rightarrow \eta_1^* < \eta_2^* \Rightarrow \eta_1^* \leq \eta_2^* .$$

Az 5.15. Lemmából az /5.98/ következtében $\mu_2^* + \kappa_2^* \geq \mu_1^*$ az /5.92/a/ miatt. Itt biztosan egyenlőség van, ha az /5.99/ implikációsor bármely tagja igaz.

Ezenkívül az /5.93/c/-ből és /5.94/-ből

$$\mu_1^* \geq \mu_2^* + 1 \geq \kappa_2^* + 2 \geq 3 .$$

A $0 < \tau_1^* < \tau_2^*$ esetre egy rekurziós algoritmust fogalmazunk meg, amely periodikus esetben véges lépésben szolgáltatja az $R^* = R_{12}(Q^*)$ ütemterv $\Pi^* = (\mu_1^*; \mu_2^*; \omega_2^*; \varepsilon_2^* /$ jellemzőit. Az algoritmus elemzésével felfedjük az R^* néhány sajátosságát is.

Vezessük be a

$$t_0' = 0, \quad f_0' = \eta_1^*$$

/5.101/

$$t_k' = f(B_{1,k}), \quad f_k' = f(B_{2,k}), \quad k=1,2,\dots,$$

jelöléseket. Legyen

$$/5.102/ \quad \varphi_k' = [f_k' / \tau_1^*], \quad \vartheta_k' = \{f_k' / \tau_1^*\} \tau_1^*, \quad k=0,1,\dots$$

Más jelölésben $\vartheta_k' \equiv f_k' \pmod{\tau_1^*}$. Nyilvánvalóan

$$/5.103/ \quad 0 \leq \vartheta_k' < \tau_1^*, \quad k=0,1,\dots$$

Nevezzük ezeket maradékoknak.

Vizsgáljuk meg az (f') és (ϑ') sorozatokat.

Ha $0 \leq \vartheta_k' \leq \eta_1^*$, akkor a $B_{2,k}$ task egy A_1 -task-kal párhuzamosan fejeződik be és az $A_{2,k+1}$ task csak az A_1 -task után kezdődhet, ahol egy β_1 -szituáció alakul ki. Ezért

$$/5.104/ \quad f_{k+1}' = f_k' + \tau_2^* + \int_0^{\eta_1^*} \Delta(x - \vartheta_k') dx,$$

amelyben

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Az 5.4. Tétel következtében a β_1 -szituációkkal egy-egy P -vel kongruens periodus végződik és

$$/5.105/ \quad \varepsilon_2^* = 1 - \vartheta_k' / \eta_1^* = \frac{1}{\eta_1^*} \int_0^{\eta_1^*} \Delta(x - \vartheta_k') dx, \quad \text{ha } 0 \leq \vartheta_k' \leq \eta_1^*.$$

Ha $\eta_1^* < \rho_k' \leq \tau_1^* - \eta_2^*$ /ha $\eta_2^* < \vartheta_1^*$ /, akkor /5.104/
igaz marad és ebben az esetben /is/ az $A_{2,k+1}$ task megszakítás nélkül ütemeződik. Az /5.104/ következménye

$$/5.106/ \quad \rho_{k+1}' = \rho_k' + \tau_2^* - \tau_1^* + \int_0^{\eta_1^*} \Delta(x - \rho_k') dx, \quad \text{ha } 0 \leq \rho_k' \leq \tau_1^* - \eta_2^*.$$

$0 \leq \rho_k' \leq \eta_1^*$ esetén ugyanis $\rho_{k+1}' = \rho_k' + \tau_2^* - \tau_1^* + \eta_1^* - \rho_k' = \tau_2^* - \vartheta_1^* \in [0, \tau_1^*)$
a redukáltság miatt. $\eta_1^* < \rho_k' \leq \tau_1^* - \eta_2^*$ esetben

$$\rho_{k+1}' = \rho_k' + \tau_2^* - \tau_1^* \in (\tau_2^* - \vartheta_1^*, \vartheta_2^*) \subset [0, \tau_1^*). \quad \text{Mindkét esetben}$$

$$\rho_{k+1}' > \rho_k'.$$

Ha $\tau_1^* - \eta_2^* < \rho_k' < \tau_1^*$, akkor az $A_{2,k+1}$ megszakítással ütemeződik. $\eta_2^* \leq \vartheta_1^*$ miatt pontosan egy megszakítás van és

$$/5.104'/ \quad f_{k+1}' = f_k' + \tau_2^* + \eta_1^*.$$

Könnyű látni, hogy ekkor

$$/5.106'/ \quad \rho_{k+1}' = \begin{cases} \rho_k' + \tau_2^* - \vartheta_1^*, & \text{ha } \vartheta_2^* < \vartheta_1^* \text{ és } \tau_1^* - \eta_2^* < \rho_k' < \tau_1^* - \tau_2^* + \vartheta_1^* \\ \rho_k' + \tau_2^* - \vartheta_1^* - \tau_1^*, & \text{ha } \tau_1^* - \min/\eta_2^*, \tau_2^* - \vartheta_1^* / \leq \rho_k' < \tau_1^* \end{cases}$$

ahol

$$/5.107/ \quad \leq_{12} = \begin{cases} \leq, & \text{ha } \vartheta_1^* \leq \vartheta_2^* \\ <, & \text{ha } \vartheta_2^* < \vartheta_1^* \end{cases}.$$

Pigyelembe véve, hogy $\tau_2^* - \vartheta_1^* - \tau_1^* < 0 < \tau_2^* - \tau_1^* \leq \tau_2^* - \vartheta_1^*$, a

$$/5.108/ \quad \rho_{k+1}' \begin{cases} > \rho_k', & \text{ha } 0 \leq \rho_k' \leq \tau_1^* - \min/\eta_2^*, \tau_2^* - \vartheta_1^* / \\ < \rho_k', & \text{ha } \tau_1^* - \min/\eta_2^*, \tau_2^* - \vartheta_1^* / \leq \rho_k' < \tau_1^*. \end{cases}$$

A $\rho_{k+1}' < \rho_k'$ csak megszakításos C_2 -ciklusnál következhet be, amikor

$$/5.109/ \quad \varphi'_{k+1} = \varphi'_k - / \vartheta_1^* + \tau_1^* - \tau_2^* / ,$$

egyébként azonban

$$/5.109'/ \quad \varphi'_{k+1} = \varphi'_k + / \tau_2^* - \tau_1^* / ,$$

vagy

$$/5.109''/ \quad \varphi'_{k+1} = \varphi'_k + / \tau_2^* - \vartheta_1^* / ,$$

attól függően, hogy $\varphi'_k \leq \tau_1^* - \eta_2^*$, vagy $\tau_1^* - \eta_2^* < \varphi'_k < \tau_1^* - / \tau_2^* - \vartheta_1^* /$.

Nevezzük az R^* ütemtervben N-szakasznak az olyan szakaszt, amelyben egymás után megszakítás nélkül ütemeződnek a C_2 -ciklusok. Az N-szakaszon φ'_k monoton nő $\tau_2^* - \tau_1^*$ növekményekkel. Nevezzük M-szakasznak az R^* ütemterv olyan szakaszát, amelyen megszakításos C_2 -ciklusok ütemeződnek. Ott φ'_k monoton nő az utolsó kivételével, amely kisebb az előző φ' -nél. Egy szakasz hosszának tekintjük a benne ütemezett C_2 -ciklusok számát. Az N-szakasz hosszát jelölje n' , az M-szakasz hosszát pedig m' . Ha $\varphi'_k > \tau_1^* - \eta_2^*$, akkor két M-szakasz követi egymást és a második hossza $m'=1$. Ilyenkor vegyük úgy, hogy a két M-szakasz között egy $n'=0$ hosszúságú N-szakasz van.

Minden R^* ütemterv N-szakasszal kezdődik mostani feltételeink mellett $/ \eta_2^* \leq \vartheta_1^* > 0$ miatt/. Ha R^* periodikus, akkor P és a vele kongruens periodusok N-szakasszal kezdődnek és M-szakasszal végződnek. Ezek az N-szakaszok $n' > 0$ hosszúságúak. Az $n'=0$ hosszúságú N-szakaszokat is megengedve minden R^* ütemtervben /N,M/-szakaszpárok következnek egymás után. Legyen $/N_j, M_j/$ a j-edik szakaszpár, $j=1,2,\dots$. Ehhez tartozik az $/n'_j, m'_j/$, $j=1,2,\dots$, egész pár, a hosszaik nagysága.

Vezessük be az

$$/5.110/ \quad n_0 = m_0 = k_0 = 0, \quad n_j = \sum_{i=1}^j n'_i, \quad m_j = \sum_{i=1}^j m'_i, \quad k_j = n_j + m_j, \quad j=1,2,\dots$$

jelöléseket. Az n_j , m_j és k_j rendre megadja a j -edik $/N, M/$ -szakaszpár végéig a megszakítás nélkül, megszakítással, illetve együttesen ütemezett C_2 -ciklusok számát. Legyen

$$/5.111/ \quad p_0 = \eta_1^*, \quad \varphi_j = \varphi'_{k_j}, \quad p_j = p'_{k_j}, \quad f_j = f'_{k_j}, \quad j=1,2,\dots$$

és

$$/5.111'/ \quad \psi_j = k_j, \quad \chi_j = m_j, \quad j=1,2,\dots$$

Nevezzük R_{12} -számhármassoknak a

$$/5.112/ \quad H_j \triangleq / \varphi_j, \psi_j, \chi_j / , \quad j=1,2,\dots$$

hármassokat. Ezek egészek és rendre megadják a j -edik $/N, M/$ -szakaszpár végéig ütemezett C_1 -ciklusok, C_2 -ciklusok, illetve a megszakítások számát.

Egy M_j -szakasz végén p_j adja meg a C_2 -ciklus végződését $/ \bmod \tau_1^* /$, $l=k_j$ jelöléssel $p'_l = p_j$ és

$$/5.113/ \quad \tau_1^* - \eta_2^* < p'_{l-1} < \tau_1^*$$

biztosan fennáll, hiszen a $C_{2,l}$ -ciklus csak így lehetett megszakításos. Mivel az M -szakasz végén $p'_{l-1} > p'_l$, ezért

$$/5.114/ \quad p'_l = p'_{l-1} - \eta_1^* + \tau_1^* - \tau_2^*$$

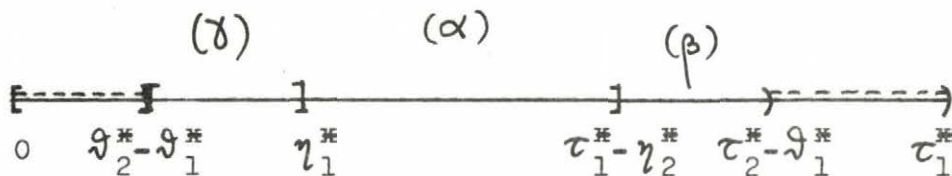
az /5.109/ szerint. Az /5.113/ figyelembevételével ebből

$$/5.115/ \quad \eta_2^* - \eta_1^* < p'_l < \tau_2^* - \eta_1^*$$

egyenlőtlenség adódik ϑ'_l maradékra. Három esetet különböztetünk meg:

- (α) $\eta_1^* < \vartheta'_l \leq \tau_1^* - \eta_2^*$
 (β) $\tau_1^* - \eta_2^* < \vartheta'_l < \tau_2^* - \vartheta_1^* / \tau_1^*$, ha $\tau_1^* + \vartheta_1^* < \tau_2^* + \eta_2^*$ igaz
 (γ) $\max / 0, \vartheta_2^* - \vartheta_1^* / \leq \vartheta'_l < \eta_1^*$.

A tartományokat az 5.6. Ábra szemlélteti. A $[0, \max / 0, \vartheta_2^* - \vartheta_1^* /]$ tartomány, ha létezik, és a $[\tau_2^* - \vartheta_1^*, \tau_1^*]$ tartomány "hozzáférhetetlen" a ϑ'_l maradék számára. A (β) tartomány nem létezik, ha $\tau_2^* - \vartheta_1^* \leq \tau_1^* - \eta_2^*$.



5.6. Ábra: A ϑ'_l maradék tartományai az M-szakaszok végén.

Vizsgáljuk meg most az (α) - (γ) eseteket egymás után.

(α) eset: $\eta_1^* < \vartheta'_l \leq \tau_1^* - \eta_2^*$. Ekkor a következő A_2 -task megszakítás nélkül ütemeződik és az M-szakasz után egy $n' > 0$ pozitív hosszúságú N-szakasz következik. Az N-szakaszon belül ϑ'_k monoton nő $\tau_2^* - \tau_1^* > 0$ növekménnyel, de a $\vartheta'_k < \tau_1^*$ korlát miatt n' biztosan véges. Az N-szakasz végét a $\vartheta'_k > \tau_1^* - \eta_2^*$ bekövetkezése jelzi.

(β) eset: $\tau_1^* - \eta_2^* < \vartheta'_l < \tau_1^* - \vartheta_1^* + \tau_1^* - \tau_2^*$. Ekkor az M-szakasz után ismét egy M-szakasz kezdődik megszakított C_2 -

ciklussal. Ilyenkor $\rho'_{i+1} < \rho'_i$. Definíció szerint a két M-szakasz között $n'_i=0$ hosszúságú N-szakasz helyezkedik el. A (β) eset kizárólag $\rho_1^* + \tau_1^* - \tau_2^* < \eta_2^*$ mellett következhet be, ezért biztosan

$$/5.116/ \quad n_j^i > 0, \quad j=1,2,\dots, \quad \text{ha} \quad \tau_2^* + \eta_2^* \leq \tau_1^* + \rho_1^*.$$

(\delta) eset: $\max / 0, \rho_2^* - \rho_1^* / \leq_{12} \rho'_i < \eta_1^*$. Ekkor az M-szakasz utolsó B_2 -task-ja egy A_1 -task-kal párhuzamosan fejeződik be és az A_1 -task után a β_1 -szituáció lép fel. Ezzel a β_1 -szituáció visszatér és ezért R^* feltétlenül periodikus lesz. Az /5.106/ szerint

$$/5.117/ \quad \rho'_{i+1} = \rho'_i.$$

Ez a (δ) eset kizárólag M-szakaszok végén következhet be, ezért a P periodus végét az első $l > 0$ index jelöli ki, amelynél $0 \leq \rho'_i \leq \eta_1^*$ bekövetkezik. Definíció szerint

$$f'_i = \rho'_i \tau_1^* + \rho'_i$$

és nyilvánvalóan

$$/5.118/ \quad p = \rho'_i \tau_1^*, \quad /1 - \varepsilon_2^* / \eta_1^* = \rho'_i.$$

Az l éppen a periodusbeli C_2 -ciklusok száma. Az 5.1. Tételbeli /5.65/ formulát figyelembe véve a periódushosszra, R^* jellemzőire a

$$/5.119/ \quad \mu_1^* = \rho'_i, \quad \mu_2^* = l, \quad \kappa_2^* = \frac{\mu_1^* \tau_1^* - \mu_2^* \tau_2^*}{\eta_1^*} - \varepsilon_2^*, \quad \varepsilon_2^* = 1 - \rho'_i / \eta_1^*$$

kifejezéseket nyerjük. Ezzel közvetett feltételt kaptunk R^* periodicitására.

5.16. Lemma: A Δ -redukált $Q^* \in Q$ konfiguráció $R^* \doteq R_{12}(Q^*)$ ütemterve a

$$0 < \tau_1^* < \tau_2^*, \quad \vartheta_1^* > 0$$

feltétel mellett akkor és csak akkor periodikus, ha van olyan $\rho'_l, l > 0$, maradék, amelyre

$$0 \leq \rho'_l \leq \eta_1^*,$$

ami ekvivalens azzal, hogy van olyan M_j -szakasza, $j > 0$, amelynek utolsó maradékára

$$/5.120/ \quad \max / 0, \vartheta_2^* - \vartheta_1^* / \leq_{12} \rho_j \leq \eta_1^*$$

bekövetkezik, ahol \leq_{12} relációjelet az /5.107/ definiálja.

Ekkor Π^* jellemzőket a H_j számhármassal

$$/5.121/ \quad \Pi^* = / \varphi_j; \psi_j; \chi_j; 1 - \rho_j / \eta_1^* /$$

szolgáltatja, ha H_j a legkisebb kívánt tulajdonságu R_{12} -számhármassal.

Bizonyítás: Tulajdonképpen nincs mit bizonyítani. Az /5.111'/ figyelembevételével ugyanis /5.121/ következik az /5.119/-ből, ha meggondoljuk, hogy a megszakítások száma kiadódik az ütemezett C_1 - és C_2 -igényciklusok hosszának különbségéből η_1^* -gal osztva és ε_2^* "korrekciót" figyelembe véve.

Q.e.d.

E lemma a periodicitás kérdését speciális M -szakasz előfordulására vezeti vissza. Bár ennek a paraméterek praktikus függvényeként nem tudjuk általában a feltételét megadni, megkonstruálhatunk egy algoritmust, amely előállítja R^* szakaszainak jellemzőit, és periodikus esetben véges lépésben a Π^* jellemzőket is szolgáltatja. Az algoritmus alapja a ρ'_k , $k=0,1,\dots$, sorozatot generáló rekurzív eljárás, amely ρ'_k -ből meghatározza ρ'_{k+1} értékét. Eddigi elemzésünk mutatja, hogy a Q^* paraméterein kívül ehhez nincs szükség egyéb információra. Mivel Q^* változatlan, a (ρ') sorozat ρ'_k tagja rekurzive meghatározott az előző ρ'_{k-1} tag által. Mivel a (ρ') esetben $\rho'_{k+1} = \rho'_1$ az /5.117/ szerint, periodikus esetben a (ρ') sorozat is periodikus, sőt nyilvánvalóan a ρ_j , $j=1,2,\dots$ sorozat /a (ρ') részsorozata/ is periodikus. Ezért elegendő tagjaikat csupán az első periodus végéig meghatározni.

Az R^* ütemterv tényleges megszerkesztéséhez a teljes (ρ^j) sorozat, sőt a $\rho_k^j, \rho_k^j, k=0,1,\dots$, sorozatok meghatározására lenne szükség. Ha azonban csupán R^* jellemzőit akarjuk meghatározni, elegendő a $\rho_j, j=1,2,\dots$, részsorozatot meghatározni addig, amíg /5.12p/ be nem következik, és ehhez elegendő a $H_j R_{12}$ -számhármast meghatározni.

Az /5.110/-/5.111'/ definíciók alapján bármilyen $j \geq 0$ mellett /5.122/ $\rho_j = k_j + j = n_j + m_j + j, \psi_j = k_j = n_j + m_j, \chi_j = m_j$ és /5.102/ figyelembevételével az első periodusban

$$\text{/5.123/} \quad f_j = \rho_j \tau_1^* + \rho_j = \eta_1^* + \psi_j \tau_2^* + \chi_j \eta_1^*,$$

amiből

$$\text{/5.124/} \quad \rho_j = \eta_1^* + \psi_j \tau_2^* + \chi_j \eta_1^* - \rho_j \tau_1^*.$$

Ha valamely véges j indexre /5.120/ bekövetkezik, akkor /5.121/ adja meg az R^* jellemzőit. Az /5.122/ mutatja, hogy a jellemzők meghatározhatók a $j, n_j, m_j, \rho_j, j=1,2,\dots$, adatokból és ezek az n_j', m_j', ρ_j adatokból. Ezért most megszerkesztünk egy algoritmust az $n_j', m_j', \rho_j, j=0,1,\dots$, adatok rekurzív meghatározására. Vegyük figyelembe, hogy

$$\rho_j = \rho_{k_j}^j, \quad k_j = n_j + m_j.$$

Az algoritmust az /5.106/ és /5.106'/ összefüggésekből tudjuk megszerkeszteni, amelyek szerint az N -szakaszokon ρ_k^j monoton nő $\tau_2^* - \tau_1^*$ növekményekkel, amíg a $\tau_1^* - \eta_2^*$ határt túl nem lépi. Ettől kezdve M -szakasz következik. Az M -szakaszon ρ_k^j monoton nő $\tau_2^* - \eta_1^*$ növekményekkel addig, amíg a τ_1^* határt el nem érné. Amikor elérné, vagy túlhaladná, ρ_k^j csökken τ_1^* mennyiséggel, hogy az /5.103/ teljesülhessen.

E tények alapján, ismerve ρ_k^j értékét egy N -szakasz kezdetén, meghatározható az $/N, M/$ -szakaszpár szakaszainak hossza és ρ_k^j értéke a szakaszok végén.

Az R^* ütemterv mindig egy N -szakasszal kezdődik a $\rho_0 = \eta_1^*$ kezdőértékkel.

Tetszőleges N_j szakasz $/j \geq 1/$ kezdetén legyen $\rho_{j-1}, n_{j-1}, m_{j-1}$ az ütemezett C_1 -ciklusok, a megszakítás nélkül, illetve megszakítással ütemezett C_2 -ciklusok száma, megfelelően, az ütemterv kezdete óta, és $\rho_{j-1} = \rho_{k_{j-1}}^j$ a maradék.

Az elmondottak alapján N_j hossza nyilvánvalóan

$$/5.125/ \quad n'_j = \left[\frac{\tau_1^* - \eta_2^* - \rho_{j-1}}{\tau_2^* - \tau_1^*} \right] + 1 = \left[\frac{\vartheta_2^* - \rho_{j-1}}{\tau_2^* - \tau_1^*} \right].$$

Az N_j szakasz utolsó C_2 -ciklusának $\rho'_{k_{j-1}+n'_j}$ maradékát

$$/5.126/ \quad \rho'_{k_{j-1}+n'_j} = \rho_{j-1} + n'_j / \tau_2^* - \tau_1^* /$$

formula szolgáltatja. Az n'_j formulája a helyes $n'_j=0$ értéket eredményezi akkor, ha a (β) esetben

$$\tau_1^* - \eta_2^* < \rho_{j-1} < \tau_2^* - \vartheta_1^*.$$

Ekkor ugyanis a

$$/0 \leq / \vartheta_1^* - \eta_2^* < \vartheta_2^* - \rho_{j-1} < \tau_2^* - \tau_1^*$$

relációsor teljesül. Ez azt jelenti, hogy az /5.125/ formula automatikusan használható az N_j szakasz hosszának számítására egy M_{j-1} szakasz végén, feltéve, hogy nem a (γ) eset következik be. A (β) esetben a megállapodásunk szerinti $n'_j=0$ hosszat nyerjük az /5.125/ alapján. Ha az M_{j-1} szakasz végén a (γ) eset következne be, ami egy P -vel kongruens periodus végét jelent, akkor az /5.125/ csak úgy szolgáltatja a következő N_j szakasz helyes hosszát, ha a ρ_{j-1} helyett η_1^* értéket használunk.

Az n'_j -re a $z-1 < [z] \leq z$ becslést alkalmazva az /5.126/ előállításból a $\rho'_{k_{j-1}+n'_j}$ maradékra a

$$/5.127/ \quad \tau_1^* - \eta_2^* < \rho'_{k_{j-1}+n'_j} \leq \vartheta_2^*$$

becslést nyerjük.

A $\rho'_{k_{j-1}+n'_j}$ maradék lesz az N_j szakaszt követő M_j szakasz kezdete $j \bmod \tau_1^*$ /. A korábban mondottak alapján az M_j szakasz hosszára az

$$/5.128/ \quad m'_j = f \geq \left(\frac{\tau_1^* - \rho'_{k_{j-1}+n'_j}}{\tau_2^* - \vartheta_1^*} \right) = [\xi] + \operatorname{sgn} \{ \xi \}$$

előállítást nyerjük, ahol

$$/5.129/ \quad \xi = \frac{\tau_1^* - \rho'_{k_{j-1}+n'_j}}{\tau_2^* - \vartheta_1^*} .$$

Az M_j szakasz végén a ρ_j maradék értéke

$$/5.130/ \quad \rho_j = \rho'_{k_{j-1}+n'_j} + m'_j / \tau_2^* - \vartheta_1^* / - \tau_1^* .$$

Az /5.128/ formulából

$$/5.131/ \quad m'_j \geq 1, \quad j=1,2,\dots,$$

nyilvánvalóan mindig igaz. Az /5.127/ becslés alapján így

/5.130/-ből a

$$\rho_j > \tau_1^* - \vartheta_2^* + / \tau_2^* - \vartheta_1^* / - \tau_1^* = \vartheta_2^* - \vartheta_1^*$$

alsó becslést nyerjük ρ_j maradékra. Ugyanakkor az /5.128/-ban a $z \leq f \leq (z) < z+1$ becslést alkalmazva az /5.130/ előállításból ρ_j -re a

$$0 \leq \rho_j < \tau_2^* - \vartheta_1^*$$

kétoldali becslést nyerjük. E két becslésből

$$/5.132/ \quad \max / 0, \vartheta_2^* - \vartheta_1^* / \leq \rho_j < \tau_2^* - \vartheta_1^*$$

összevont becslés adódik, ahol a \leq_{12} relációjelet az /5.107/ definiálja.

Az N_j, M_j szakaszpáron az ütemezett C_1 -ciklusok száma $n'_j + m'_j + 1$ darabbal nő meg, n'_j -vel az N_j és $m'_j + 1$ -gyel az M_j szakaszon. Az ütemezett C_2 -ciklusok száma n'_j és m'_j darabbal nő az N_j , illetve M_j szakaszon megszakítás nélkül, illetve megszakítással. Az M_j szakasz végén /az N_{j+1} elején/ tehát

$$/5.133/ \quad \varphi_j = \varphi_{j-1} + n'_j + m'_j + 1, \quad n_j = n_{j-1} + n'_j, \quad m_j = m_{j-1} + m'_j$$

szolgáltatják az R^* kezdetétől ütemezett C_1 -ciklusok, megszakítatlan ill. megszakított C_2 -ciklusok számát.

Az /5.125/, /5.126/ és az /5.128/, /5.130/ számításokat addig kell ismételni, amíg az /5.130/ eredményeként $\rho_j \leq \eta_1^*$ maradékot kapunk. Az 5.16. Lemma szerint ez csak periodikus R^* ütemterv esetén következik be. R^* periodicitásának tehát garantálnak kell lennie, vagy valamely más szempont szerint kell az iterációt befejezni. Ha $\rho_j \leq \eta_1^*, j > 0$, bekövetkezik, akkor az /5.121/ és /5.122/ alapján R^* jellemzőit

$$/5.134/ \quad \mu_1^* = n_j + m_j + j; \quad \mu_2^* = n_j + m_j; \quad \kappa_2^* = m_j; \quad \varepsilon_2^* = 1 - \rho_j / \eta_1^*$$

formulákkal kapjuk meg.

Algoritmusunkat formálisan is megfogalmazzuk az alábbiakban. Az algoritmus kimenő adatai a

$$\Pi^* = / \mu_1^*; \mu_2^*; \kappa_2^*; \varepsilon_2^* /$$

jellemzők. Ezekből egyébként j, n_j, m_j, ρ_j meghatározhatók a

$$/5.136/ \quad j = \mu_1^* - \mu_2^*; \quad n_j = \mu_2^* - \kappa_2^*; \quad m_j = \kappa_2^*; \quad \rho_j = /1 - \varepsilon_2^* / \eta_1^*$$

formulákkal.

Nem nehéz meggyőződni arról, hogy az ismertett algoritmus abban az esetben is alkalmazható az Π_{12} jellemzők meghatározására, ha Q nem Δ -redukált, azonban $\eta_2 \leq \nu_1$ és $\tau_1 < \tau_2$ feltételeknek eleget tesz, és nem elfajult. Ezt azonban nem részletezzük.

R₁₂^{*}- Algoritmus: Bemenő adatok: $\eta_1^*, \vartheta_1^*, \eta_2^*, \vartheta_2^*, L$;

Kimenő adatok: $\mu_1^*, \mu_2^*, \kappa_2^*, \varepsilon_2^*, \varphi_L, \psi_L, \chi_L, \rho_L$;

0. Lépés: $\tau_1^* := \eta_1^* + \vartheta_1^*$; $\tau_2^* := \eta_2^* + \vartheta_2^*$;

Ha $0 < \eta_2^* \leq \vartheta_1^* \leq \tau_1^* < \tau_2^* < \eta_2^* + \tau_1^*$ nem teljesül, akkor HIBA és Vége;

$\rho := \eta_1^*$; $n := m := j := 0$;

1. Lépés:

$n' := \left\lfloor \frac{\vartheta_2^* - \rho}{\tau_2^* - \tau_1^*} \right\rfloor$; $n := n + n'$;
 $\rho := \rho + n' / \tau_2^* - \tau_1^* /$;
 $\xi := \frac{\tau_1^* - \rho}{\tau_2^* - \vartheta_1^*}$;
 $m' := [\xi] + \text{sgn} \{\xi\}$; $m := m + m'$;
 $\rho := \rho + m' / \tau_2^* - \vartheta_1^* / - \tau_1^*$;
 $j := j + 1$;

2. Lépés: Ha $j=L$, akkor

$\varphi_L := n + m + j$; $\psi_L := n + m$; $\chi_L := m$; $\rho_L := \rho$ és Vége;

Ha $\eta_1^* < \rho < \tau_1^*$, akkor 1. Lépés;

$\mu_1^* := n + m + j$; $\mu_2^* := n + m$; $\kappa_2^* := m$; $\varepsilon_2^* := 1 - \rho / \eta_1^*$;

Vége.

Az algoritmus 0. Lépése előkészítő jellegű és biztosítja, hogy az HIBA jelzéssel azonnal befejeződik, ha az /5.97/ feltételek nem teljesülnek. Nem szorul bizonyításra, hogy az /5.97/ feltételek mellett az algoritmus 1. Lépése rekurzív az $\{n\}$, $\{m\}$, $\{p\}$ sorozatok tagjait határozza meg az /5.125/, /5.126/, /5.128/, /5.130/ formulák szerint. Ezek számítása mindaddig folytatódik, amíg a 2. Lépésben a $j=L$, vagy $p \leq \eta_1^*$ feltételek valamelyike be nem következik.

Mondjuk azt, hogy az R_{12}^* -Algoritmus normálisan végződik, ha $p \leq \eta_1^*$ és erőszakoltan végződik, ha $j=L$ feltétel miatt fejeződik be. Az L egész ésszerűen nagy véges megválasztásával nagy valószínűséggel biztosítható, hogy periodikus $R_{12}(Q^*)$ esetén az algoritmus normálisan végződjék, de egyébként is véges idő után leálljon. Normális végződésakor Π^* , erőszakolt végződésakor a $H_L R_{12}$ -számhármasság és p az R_{12}^* -Algoritmus kimenete. Normális végződésakor ugyanis az utolsó p_j -re /5.120/ szerint

$$\max /0, \mathcal{I}_2^* - \mathcal{I}_1^* / \leq_{12} p_j \leq \eta_1^*$$

teljesül. Ebből az /5.134/ szerint az \mathcal{E}_2^* jellemzőre a

$$/5.136/ \quad 0 \leq \mathcal{E}_2^* \leq_{12} \min /1, \frac{\tau_1^* - \mathcal{I}_2^*}{\eta_1^*} /$$

egyenlőtlenséget /határokat/ kapjuk, ahol

$$/5.137/ \quad \leq_{12} = \begin{cases} < , & \text{ha } \mathcal{I}_1^* \leq \mathcal{I}_2^* \\ \leq , & \text{ha } \mathcal{I}_1^* > \mathcal{I}_2^* , \end{cases}$$

összhangban az /5.107/ definícióval. Az /5.136/ a

$$0 \leq \mathcal{E}_2^* \leq 1$$

egyenlőtlenséggé válik, ha $\tau_1^* - \mathcal{I}_2^* > \eta_1^*$.

Az 5.16. Lemma alapján megfogalmazhatjuk az alábbi tételt.

5.5. Tétel: Az /5.97/ feltételeknek eleget tevő Q^* konfiguráció $R^* = R_{12}^*(Q^*)$ ütemterve akkor és csak akkor periodikus, ha az R_{12}^* -Algoritmus bármilyen nagy L egész mellett véges lépésben befejeződik. Az algoritmus normális végződésénél az R^* ütemterv Π^* jellemzőit szolgáltatja.

Bizonyítás: Kész.

Q.e.d.

Az R_{12}^* -Algoritmus mind normális, mind erőszakolt esetben egy M -szakasz végén fejeződik be és szolgáltatja azokat az adatokat, amelyekből az utolsó $n_j, m_j, j, H_j, \rho_j, f_j, t_j / \Delta t_k^j /$ stb. értékek meghatározhatók. Nem szolgáltat azonban elegendő adatot a teljes részsorozatok meghatározásához. Ahhoz az n, m, ρ átmeneti értékeit kell megőrizni.

Az R_{12}^* -Algoritmustól függetlenül érdemes részletesebben vizsgálni az $/N, M/$ -szakaszpárok $/n', m'/$ hosszainak alakulását, mert ez az R^* ütemterv srukturájának jó jellemzője.

Legyen J az első j index, amelyre a

$$(\rho) : \quad \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_j, \dots$$

sorozatban ρ_0 után $\rho_j \leq \eta_1^*$ következik. Ez azt jelenti, hogy R^* periodikus és a P első periodusa J darab $/N, M/$ -szakaszból áll. Ha $\rho_j \leq \eta_1^*, j > 0$, véges j -re nem következik be, akkor R^* nem periodikus és legyen $J = \infty$.

Vezessük be az

$$\underline{n} \doteq -1 + \frac{\vartheta_1^* - \eta_2^*}{\tau_2^* - \tau_1^*}, \quad \bar{n} \doteq 1 + \frac{\vartheta_1^* - \eta_2^*}{\tau_2^* - \tau_1^*}$$

/5.138/

$$\underline{m} \doteq -1 + \frac{\eta_1^* + \eta_2^*}{\tau_2^* - \vartheta_1^*}, \quad \bar{m} \doteq 1 + \frac{\eta_2^*}{\tau_2^* - \vartheta_1^*}$$

mennyiségeket. /Ezek általában nem egészek./ Bebizonyítjuk, hogy

$$/5.139/ \quad n'_1 = [\bar{n}], \quad \underline{n} < n'_j < \bar{n}, \quad 1 < j \leq J$$

$$/5.140/ \quad \underline{m} < m'_j < \bar{m}, \quad 1 \leq j < J, \quad \underline{m} \leq m'_{12} < \bar{m}.$$

Az /5.125/-ből $\vartheta_0 = \eta_1^*$ figyelembevételével

$$n'_1 > \frac{\vartheta_2^* - \eta_1^*}{\tau_2^* - \tau_1^*} - 1 = \frac{\vartheta_1^* - \eta_2^*}{\tau_2^* - \tau_1^*} = \bar{n} - 1,$$

$$n'_1 \leq \frac{\vartheta_2^* - \eta_1^*}{\tau_2^* - \tau_1^*} = 1 + \frac{\vartheta_1^* - \eta_2^*}{\tau_2^* - \tau_1^*} = \bar{n},$$

vagyis valóban $n'_1 = [\bar{n}]$. $j > 1$ mellett az /5.125/ és /5.132/ alapján

$$n'_j > \frac{\vartheta_2^* - \vartheta_{j-1}^*}{\tau_2^* - \tau_1^*} - 1 > \frac{\vartheta_2^* - \tau_2^* + \vartheta_1^*}{\tau_2^* - \tau_1^*} - 1 = \underline{n},$$

$$n'_j \leq \frac{\vartheta_2^* - \vartheta_{j-1}^*}{\tau_2^* - \tau_1^*} < \frac{\vartheta_2^* - \eta_1^*}{\tau_2^* - \tau_1^*} = \bar{n},$$

az utóbbi azért, mert $j-1 < J$ és így $\vartheta_{j-1}^* > \eta_1^*$. Ezzel az /5.139/ igazolva van. Az /5.140/ bizonyításához vegyük figyelembe, hogy ξ egész esetén $m'_j = \xi$ és ezt az /5.130/-ba helyettesítve $\vartheta_j = 0 \leq \eta_1^*$ következik be. Ez azt jelenti, hogy $j < J$ mellett ξ nem lehet egész. Azonban $j = J$ mellett is

$\vartheta_{j=0}$ csak $\vartheta_2^* < \vartheta_1^*$ esetén léphet fel, mert egyébként a $[0, \vartheta_2^* - \vartheta_1^*]$ intervallum elérhetetlen a ϑ_j számára. Ez azt jelenti, hogy

$$/5.141/ \quad \xi < m_j' < \xi + 1, \text{ ha } 1 \leq j < J \text{ és ha } j = J \text{ és } \vartheta_2^* \geq \vartheta_1^*.$$

Ennek, az /5.129/-nek és az /5.127/-nek az alapján $j < J$ mellett

$$m_j' > \xi = \frac{\tau_1^* - \vartheta_{k_{j-1}+n_j'}'}{\tau_2^* - \vartheta_1^*} \geq \frac{\tau_1^* - \vartheta_2^*}{\tau_2^* - \vartheta_1^*} = \underline{m}$$

$$m_j' < \xi + 1 = \frac{\tau_1^* - \vartheta_{k_{j-1}+n_j'}'}{\tau_2^* - \vartheta_1^*} + 1 < \frac{\eta_2^*}{\tau_2^* - \vartheta_1^*} + 1 = \bar{m}$$

és $j = J$ mellett

$$m_J' \begin{cases} \geq \xi \geq \underline{m}, & \text{ha } \vartheta_2^* < \vartheta_1^*, \\ > \xi \geq \underline{m}, & \text{ha } \vartheta_2^* \geq \vartheta_1^*, \end{cases}, \quad m_J' < \xi + 1 < \bar{m}.$$

Ezzel az /5.140/ is bizonyítva van.

Az /5.139/ és /5.140/ becslések általában nem javíthatók, hiszen meglehetősen szorosan behatárolják a szakasz-hosszakat. Az /5.138/ definíciókból

$$/5.142/ \quad \bar{n} - \underline{n} = 2 \text{ és } 1 < \bar{m} - \underline{m} = 2 - \frac{\eta_1^*}{\tau_2^* - \vartheta_1^*} \leq 2 < 2, \text{ ha } \eta_1^* > 0/$$

és így n_j' és m_j' egyaránt legfeljebb két-két szomszédos egész értéket vehet fel.

Bizonyos feltételek mellett még pontosabban meghatározhatjuk a szakasz-hosszak értékét. Az /5.139/ és /5.140/ relációkat, amelyek általában igazak még kiegészíthetjük az alábbi mindig teljesülő relációkkal:

$$/5.143/ \quad n_1' \geq 1, \quad n_j' \geq 0, \quad 1 < j \leq J,$$

$$/5.144/ \quad m_j' \geq 1, \quad 1 \leq j \leq J.$$

Ezenkívül néhány speciális törvényszerűséget tartalmaznak az alábbi lemmák.

5.17. Lemma: Ha valamely $n' \geq 0$ egészre

$$/5.145/ \quad n' / \tau_2^* - \tau_1^* / < \vartheta_1^* - \eta_2^* < /n'+1/ / \tau_2^* - \tau_1^* / ,$$

akkor

$$/5.146/ \quad n'_1 = n' + 1 , \quad n' \leq n'_j \leq n'+1 , \quad 1 < j \leq J,$$

és speciálisan

$$/5.146'/ \quad \begin{aligned} n'_1=1, 0 \leq n'_j \leq 1, 1 < j \leq J, \text{ ha } \vartheta_1^* - \eta_2^* < \tau_2^* - \tau_1^* \\ n'_1=2, 1 \leq n'_j \leq 2, 1 < j \leq J, \text{ ha } \tau_2^* - \tau_1^* < \vartheta_1^* - \eta_2^* < 2/\tau_2^* - \tau_1^*/. \end{aligned}$$

Bizonyítás: Az állítások következnek abból, hogy az /5.145/ esetén $n'-1 < \underline{n} < n'$ és $n' + 1 < \bar{n} < n'+2$, így az (\underline{n}, \bar{n}) intervallum az n' és $n'+1$ egészeket tartalmazza és az /5.139/ ekvivalens az /5.146/-tal. Az /5.146'/ az /5.146/ speciális esetei $n'=0$ és $n'=1$ mellett.

Q.e.d.

5.18. Lemma: Ha valamely $n' \geq 0$ egészre

$$/5.147/ \quad \vartheta_1^* - \eta_2^* = n' / \tau_2^* - \tau_1^* / ,$$

akkor

$$/5.148/ \quad n'_1 = n' + 1 , \quad n'_j = n' , \quad 1 < j \leq J,$$

és speciálisan

$$/5.148'/ \quad \begin{aligned} n'_1 = 1, n'_j = 0, 1 < j \leq J, \text{ ha } \vartheta_1^* = \eta_2^* \\ n'_1 = 2, n'_j = 1, 1 < j \leq J, \text{ ha } \vartheta_1^* - \eta_2^* = \tau_2^* - \tau_1^* . \end{aligned}$$

Bizonyítás: Az /5.147/ feltétel mellett $\underline{n}=n'-1$, $\bar{n}=n'+1$ és az /5.139/ relációk csupán az /5.148/-at teszik lehetővé. $n'=0$ és $n'=1$ mellett az /5.148'/ következik.

Q.e.d.

5.19. Lemma: Ha van olyan $m' \geq 1$ egész, hogy

$$/5.149/ \quad 0 \leq m' / \tau_2^* - \vartheta_1^* / - \eta_2^* < \eta_1^*$$

teljesüljön, akkor

$$/5.150/ \quad m_j' = m' , \quad 1 \leq j \leq J,$$

vagyis az (m') sorozat konstans. Speciálisan

$$/5.150'/ \quad m_j' = 1, \quad 1 \leq j \leq J, \quad \text{ha} \quad \vartheta_2^* \geq \vartheta_1^*$$

$$m_j' = 2, \quad 1 \leq j \leq J, \quad \text{ha} \quad \tau_2^* - \tau_1^* < \vartheta_1^* - \vartheta_2^* \leq \tau_2^* - \vartheta_1^* .$$

Bizonyítás: Az /5.149/ feltételből következik, hogy

$$\eta_2^* - / \tau_2^* - \vartheta_1^* / \leq / m' - 1 / / \tau_2^* - \vartheta_1^* / ,$$

és az /5.138/ alapján ebből $\bar{m} \leq m' + 1$ adódik. Másrészt az /5.149/-ből következik, hogy

$$\eta_1^* + \eta_2^* - / \tau_2^* - \vartheta_1^* / > / m' - 1 / / \tau_2^* - \vartheta_1^* /$$

és ebből $\underline{m} > m' - 1$. Vagyis az $[\underline{m}, \bar{m}]$ intervallum csak az m' egészet zárja közre és ezért az /5.140/-ből az /5.150/ következik. $m' = 1$ és 2 mellett adódik az /5.150'/.

Q.e.d.

5.20. Lemma: Ha van olyan $m' > 1$ egész, hogy

$$/5.151/ \quad m' / \tau_2^* - \vartheta_1^* / - \eta_2^* = \eta_1^* ,$$

akkor

$$/5.152/ \quad m_j' = m' , \quad 1 \leq j < J, \quad m' - 1 \leq m_J' \leq m'$$

és speciálisan

$$/5.152'/ \quad m'_j = 2, \quad 1 \leq j < J, \quad 1 \leq m'_J \leq 2, \quad \text{ha } \tau_2^* - \tau_1^* = \vartheta_1^* - \vartheta_2^*.$$

0. Megjegyzés: $m'=1$ értékkel az /5.151/ soha nem teljesülhet, mert $\vartheta_2^* = \tau_1^*$ következne és ez ellentmondana a redukáltság feltevésnek. $m' > 1$ esetén viszont $/m'-1//\tau_2^* - \vartheta_1^* \geq \tau_2^* - \vartheta_1^* > \eta_1^*$ miatt $\vartheta_2^* - \vartheta_1^* < 0$ mellett teljesülhet csak az /5.151/. $\vartheta_2^* \geq \vartheta_1^*$ esetén tehát a lemma feltétele kizárt.

Bizonyítás: Az /5.151/ feltételből $/m'-1//\tau_2^* - \vartheta_1^* - \eta_1^* = \eta_2^* - \tau_2^* - \vartheta_1^*$ és az /5.138/ figyelembevételével ebből $m'-1 - \eta_1^*/(\tau_2^* - \vartheta_1^*) = \bar{m} - 2$. Így $\bar{m} \leq m'+1$. Ugyanakkor az /5.151/-ből még $/m'-1//\tau_2^* - \vartheta_1^* = \eta_1^* + \eta_2^* - \tau_2^* - \vartheta_1^*$ és ebből $m'-1 = \underline{m}$. Az $[\underline{m}, \bar{m})$ intervallum tehát az $m'-1$ és m' egészeket tartalmazza, ezért az /5.140/ relációkból az /5.152/ következik. A 0. Megjegyzés szerint ugyanis $\vartheta_2^* < \vartheta_1^*$ és ezért az /5.140/-ben az /5.137/ szerint $\leq'_2 = \leq$. Az /5.152'/ az /5.151/ és /5.152/-ből $m'=2$ mellett adódik.

Q.e.d.

1. Megjegyzés: Az 5.17.-5.20. Lemmákban szereplő feltételek csak elegendőek, de nem szükségesek az állítások teljesüléséhez.

2. Megjegyzés: Az 5.17. vagy 5.18. Lemma feltétele mindig biztosan teljesül és az egyik állítás biztosan igaz. Az /5.148/ tulajdonképpen az /5.146/ speciális esete. Korántsem biztos azonban, hogy az 5.19. vagy 5.20. Lemmák valamelyikének feltétele teljesül.

3. Megjegyzés: Az 5.17.-5.20. Lemmák akkor is érvényesek, ha $J = \infty$, azaz R^* nem periodikus; ilyenkor a $j=J$ melletti állítások elhagyandók.

Az 5.17.-5.20. Lemmák jelentősége az, hogy a $H_j = / \varphi_j, \psi_j, \chi_j /$ számhármassokra vonatkozóan biztosítanak összefüggéseket. Ezek az /5.97/ feltételeknek eleget tevő konfigurációk bizonyos osztályainál is lehetővé teszik az R^* ütemterv jellemzőinek meghatározását. Mielőtt ezek vizsgálatára rátérünk az 5.17.-5.20. Lemmák feltételeit az 5.7. Ábra szerint szemléltetjük.

Az 5.7. Ábrán a \mathcal{Q} konfigurációtér egy rögzített $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ paraméterpár melletti alterét ábrázoljuk a $(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ koordináta-rendszerben. Az alter $\mathcal{Q}^*(\eta^*)$ redukált tartományát az 5.1. Ábra szerint rajzolhatjuk fel. Ennek része az /5.97/ feltételeknek eleget tevő sáv, ahol $\tau_2^* > \tau_1^*$, azaz

$$\mathcal{Q}_2^* > \mathcal{Q}_1^* + / \eta_1^* - \eta_2^* / .$$

Ez utóbbi sáv része a $\mathcal{Q}_1^* > \mathcal{Q}_2^*$ feltételnek is eleget tevő konfigurációk sávja. Ezen a sávon belül alkotnak további sávokat azokat a konfigurációk, amelyek eleget tesznek az /5.149/ feltételnek. Az /5.151/ feltételnek eleget tevő konfigurációk az utóbbi sávokat határoló egyenesek mentén helyezkednek el. Az /5.147/ feltételnek eleget tevő konfigurációk a $(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) = (\eta_2^*, \eta_1^*)$ ponton átmenő sugársort alkotnak amelyek közötti szögtartományokon a konfigurációk az /5.145/ feltételt elégítik ki.

A /4.145/, /4.147/, /4.149/ és /4.151/ alternatív felírása rendre

$$/5.145'/ \quad \frac{n'}{n'+1} / \vartheta_2^* - \eta_1^* / < \vartheta_1^* - \eta_2^* < \frac{n'+1}{n'+2} / \vartheta_2^* - \eta_1^* / , \quad n' \geq 0$$

$$/5.147'/ \quad \vartheta_1^* - \eta_2^* = \frac{n'}{n'+1} / \vartheta_2^* - \eta_1^* / , \quad n' \geq 0$$

$$/5.149'/ \quad \vartheta_1^* - \frac{m'-1}{m'} \eta_2^* \leq \vartheta_2^* < \vartheta_1^* - \frac{m'-1}{m'} \eta_2^* + \frac{\eta_1^*}{m'} , \quad m' \geq 1$$

$$/5.151'/ \quad \vartheta_2^* = \vartheta_1^* - \frac{m'-1}{m'} \eta_2^* + \frac{\eta_1^*}{m'} , \quad m' \geq 1 .$$

Az n' és m' értékek szemléltetésére az 5.7. Ábrán három összetartozó derékszögű háromszöget rajzoltunk fel. A $Q(\eta^*)$, bármely $\theta^* = (\vartheta_1^*, \vartheta_2^*)$ pontjához egyértelműen rajzolhatók fel ezek a háromszögek és a megjelölt

α, β és γ szögeket a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_1^* - \vartheta_2^*}{\tau_2^* - \vartheta_1^*} , \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\vartheta_1^* - \vartheta_2^*}{\tau_2^* - \vartheta_1^*} , \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\vartheta_1^* - \eta_2^*}{\tau_2^* - \tau_1^*}$$

kifejezések definiálják. Ezek segítségével az 5.17.-5.20.

Lemmák feltételei rendre így is felírhatók:

$$/5.145''/ \quad n' < \operatorname{tg} \gamma < n'+1$$

$$/5.147''/ \quad \operatorname{tg} \gamma = n'$$

$$/5.149''/ \quad \operatorname{tg} \beta \leq m'-1 < \operatorname{tg} \alpha$$

$$/5.151''/ \quad \operatorname{tg} \alpha = m'-1 .$$

Az /5.97/ feltételeknek eleget tevő Q^* konfigurációk terében $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta < 1$, ezért biztosan legfeljebb egy $m'-1$ értéket foghatnak közre.

Érdemes még megjegyezni, hogy a 45° -os egyenesek mentén a $Q^*(\eta^*)$ altéren az α és β szögek állandók és $|\operatorname{tg} \delta|$ monoton nő $\eta_1^* - \eta_2^*$ -gal 0-tól ∞ -ig. A növekedés sebessége annál nagyobb, minél közelebb van az egyenes a $\eta_2^* = \eta_1^* + \eta_1^* - \eta_2^*$ egyeneshez. $\tau_2^* > \tau_1^*$ esetén $\operatorname{tg} \delta$ pozitív, $\tau_2^* < \tau_1^*$ esetén pedig negatív. A $\operatorname{tg} \alpha = m' - 1$ egyenes mentén

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{m'}{\eta_2^* - m' - 1 / \eta_1^*} / \eta_1^* - \eta_2^* ,$$

amely láthatóan akkor pozitív, ha $\eta_2^* > m' - 1 / \eta_1^*$ azaz $m' < \frac{\eta_2^*}{\eta_1^*} + 1$. Pontosan ekkor van az /5.151'/ egyenes a $\tau_2^* > \tau_1^*$ tartományban.

A most következő lemma azokkal a konfigurációkkal foglalkozik, amelyekre

$$\varphi_j = \psi_j + \chi_j, \quad j=1,2,\dots,$$

feltétel teljesül. Igazolja R^* periodicitását és módszert szolgáltat a Π^* jellemzők meghatározására. A lemma és az 5.19. Lemma azután lehetővé teszi az 5.6. Tétel keretében az /5.97/ eset $\eta_1^* \leq \eta_2^*$ esetének tisztázását.

5.21. Lemma: Bármely $Q^* \in Q$ konfigurációnál, amelyre a

/5.153/ nem-elfajult, redukált, $\tau_1^* < \tau_2^*$

feltételek teljesülnek, igazak az alábbi állítások az

$$R^* \doteq R_{12}(Q^*)$$

ütemtervével kapcsolatban.

/A/ Ekvivalens a következő három tény:

- /a/ $\varphi_j = \psi_j + \chi_j, \quad 1 \leq j \leq J$
 /5.154/ /b/ $m_j' = 1, \quad 1 \leq j \leq J$
 /c/ R^* periodikus és $\mu_1^* = \mu_2^* + \kappa_2^*$;

/B/ Az /5.154/ teljesülése esetén az R^* ütemterv Π^* jellemzői egy

/5.155/ $0 \leq B \xi^* - A \leq_{12} \alpha^*$

közelítési feladat legkisebb nem-negatív $/B^*, A^*/$ megoldása és annak

/5.156/ $\Delta^* = B^* \xi^* - A^*$

hibája segítségével adhatók meg és a

/5.157/ $\mu_1^*, \mu_2^*, \kappa_2^*$ páronként relatív primek.

Az /5.155/ egyenlőtlenségben $\xi^* > 0, \alpha^* > 0$, és ezek a Q^* paramétereinek függvényei és a \leq_{12} relációjelet az /5.137/ definiálja;

/C/ Az /5.155/ egyenlőtlenségben a ξ^*, α^* három alternatív választási lehetőségét és a Π^* jellemzők megfelelő előállítását a megoldások segítségével a következő táblázat adja meg:

	ξ^*	α^*	μ_1^*	μ_2^*	κ_2^*	ε_2^*
/a/	ϑ_1^*	$\eta_{1-\max}^*/0, \vartheta_2^* - \vartheta_1^*$	$A^* + B^*$	A^*	B^*	$\Delta^*/\tau_2^* - \tau_1^*/$
	$\tau_2^* - \tau_1^*$	$\tau_2^* - \tau_1^*$				η_1^*
/5.158/ /b/	$\tau_2^* - \eta_1^*$	$\eta_{1-\max}^*/0, \vartheta_2^* - \vartheta_1^*$	A^*	$A^* - B^*$	B^*	$\Delta^*/\tau_2^* - \tau_1^*/$
	$\tau_2^* - \tau_1^*$	$\tau_2^* - \tau_1^*$				η_1^*
/c/	ϑ_1^*	$\eta_{1-\max}^*/0, \vartheta_2^* - \vartheta_1^*$	B^*	A^*	$B^* - A^*$	$\Delta^*/\tau_2^* - \eta_1^*/$
	$\tau_2^* - \eta_1^*$	$\tau_2^* - \eta_1^*$				η_1^*

Bizonyítás: Az /A/-/C/ állításokat egyszerre bizonyítjuk. $m_j' \equiv 1$ esetén az /5.110/ definíció szerint $m_j = j$ és az /5.122/ alapján $\varphi_j = n_j + 2j$, $\psi_j = n_j + j$, $\chi_j = j$ adódik, amiből az /5.154/a/ következik. Az /5.122/-ből $n_j = \psi_j - \chi_j$, $m_j = \chi_j$, $j = \varphi_j - \psi_j$, ezért $\varphi_j = \psi_j + \chi_j$ esetén $m_j = \chi_j = \varphi_j - \psi_j = j$. Az /5.110/ definícióból ekkor $m_j' \equiv 1$ következik. Ezzel az /5.154/a/ és /5.154/b/ ekvivalenciáját bizonyítottuk.

Ha R^* periodikus és $\mu_1^* = \mu_2^* + \kappa_2^*$, akkor az 5.15. Lemma szerint minden B_2 -task-kal párhuzamosan pontosan egy A_1 -task indul. Ekkor az R^* ütemterv bármely $[0, f_k')$ szakaszán pontosan $u_k' = k$ megszakítást nem okozó A_1 -task indul. Ez az M-szakaszok végén is igaz, ezért a megszakítást nem okozó A_1 -task-ok $\varphi_j - \chi_j$ száma egyenlő az ütemezett B_2 -task-ok ψ_j számával, vagyis az /5.154/a/ igaz. Megfordítva, ha az /5.154/a/ igaz, akkor bizonyítandó az /5.154/c/. Ha R^* periodikus, akkor az /5.154/a/ magában foglalja a $\mu_1^* = \mu_2^* + \kappa_2^*$ egyenlőséget. Tehát csupán R^* periodicitását kell bizonyítanunk. Ezzel együtt bizonyítjuk a /B/ és /C/ állításokat is.

A 3.8. Lemma szerint egy következetes ütemterv akkor és csak akkor periodikus, ha van visszatérő szituációja. Az 5.4. Tétel szerint, ha R^* periodikus, akkor abban a β_1 -szituáció visszatérő. Ezért R^* akkor és csak akkor periodikus, ha benne a β_1 visszatérő. Ezt kell bizonyítanunk.

Az R^* ütemtervben minden B_2 -task-kal párhuzamosan indul egy A_1 -task. A β_1 -szituációk kizárólagos jellegzetessége az, hogy az ott végződő A_1 -task egy B_2 -task-kal

párhuzamosan indul, de nem annál előbb fejeződik be. Minden más A_1 -task vagy megszakító, vagy B_2 -vel párhuzamosan indul és annál előbb is fejeződik be. A β_1 -szituáció ismerve formálisan az, hogy valamely $l > 0$ -ra

$$/5.159/ \quad \max / 0, \gamma_2^* - \gamma_1^* / \leq \gamma_l' \leq \gamma_1^*$$

teljesül. Ha l az első ilyen index, akkor $k < l$ mellett

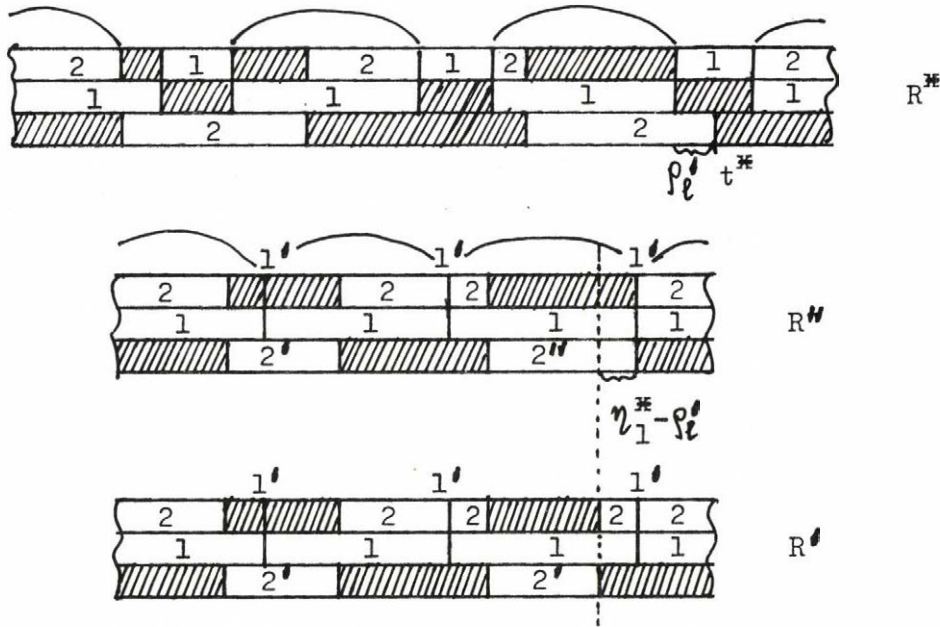
$$\gamma_1^* < \gamma_k' < \gamma_1^*.$$

Tekintsük most az R^* ütemtervet és legyen $t^* = f_l'$ az első C_2 -ciklus végződése, amely után β_1 -szituáció lép fel, azaz /5.159/ teljesül, ha ilyen van, egyébként legyen $t^* = \infty$.

Az R^* ütemtervből hagyjuk ki az A_1 -task-ok ütemezési szakaszait és az így nyert "ütemtervet" jelölje R'' . Az $R^* \rightarrow R''$ transzformációt az 5.8. Ábrán szemléltetjük. Defináljuk az

$$Q' \doteq / \gamma_1'; \gamma_1'; \gamma_2'; \gamma_2^* / = / 0; \gamma_1^*; \gamma_2^*; \gamma_2^* - \gamma_1^* /$$

konfigurációt és legyen $R' = R_{12}(Q')$ ennek ütemterve. Az R'' "ütemterv" azon kezdeti szakasza, amelyet az R^* ütemterv $[0, t^*)$ szakaszából kapunk biztosan megegyezik R' kezdeti szakaszával, legfeljebb annyi eltéréssel, hogy az utolsó $\gamma_2' = \gamma_2^* - \gamma_1^*$ igényű B_2' -task helyett egy $\gamma_2'' = \gamma_2^* - \gamma_l' \geq \gamma_2'$ igényű B_2'' -task ütemeződik. Ennek jellemzője, hogy β_1 -szituáció előtti task és az első olyan B_2 -task, amellyel párhuzamosan induló A_1' -task nem előbb fejeződik be. Az R' ütemtervben neki megfelelő B_2' -task jellemzője ugyanez, de ott az is lehet, hogy vele párhuzamosan nem is indul



5.8. Ábra: Az $R^* \rightarrow R''$ transzformáció és R' .

A'_1 -task. Látjuk tehát, hogy R^* periodicitása ekvivalens azzal, hogy az R' ütemtervben legyen olyan B'_2 -task, amely A'_1 -task után indul és a következő A_1 -task-nál nem később, de ugyanakkor η_1^* -nál nem többel korábban fejeződik be /az utóbbi azért, mert $\eta_1^* - \rho_l' \geq 0$ /. Ez azt jelenti, hogy kell lennie olyan $k > 0$, $l > 0$ egész párnak, hogy az R' ütemtervben

$$f(c'_{1,k-1}) < f(c'_{2,l}) - \mathcal{J}'_2$$

$$f(c'_{1,k}) - \eta_1^* \leq f(c'_{2,l}) \leq f(c'_{1,k}) .$$

Azonban R' ütemtervben mindkét job-folyam késleltetés nélkül ütemeződik $\eta_1' = 0$ miatt, ezért a ciklusvégződéseket sorszámuk meghatározza és $f(c'_{1,k}) = k \tau'_1 = k \mathcal{J}_1^*$,
 $f(c'_{2,l}) = l \tau'_2 = l / \tau_2^* - \eta_1^*$. Ezeket a fenti egyenlőtlenségekben figyelembe véve és a két egyenlőtlenséget összevonva a

$$0 \leq \kappa \vartheta_1^* - \ell / \tau_2^* - \eta_1^* / \leq \eta_1^* - \max / 0, \vartheta_2^* - \vartheta_1^* /$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ez láthatóan ekvivalens az /5.155/ egyenlőtlenséggel a ξ^* és α^* /5.158/c/-beli értékeivel. R^* periodicitása tehát ennek megoldhatóságán múlik, amint azt /B/ alatt állítottuk. A 2. Fejezet 2.2. Tételének 2.1. Korolláriuma szerint azonban $\alpha > 0$ esetén az /5.155/-nek mindig van pozitív megoldása. $\alpha^* > 0$ azonban most igaz, mert $\eta_1^* - \max / 0, \vartheta_2^* - \vartheta_1^* / = \min / \eta_1^*, \tau_1^* - \vartheta_2^* / > 0$. Ez azt jelenti, hogy lehetetlen az, hogy az R^* -ban a β_1 -szituáció ne legyen visszatérő, hiszen akkor az /5.155/-nek nem lehetne megoldása. Ezzel az /A/ állítást teljesen bizonyítottuk. A /B/ állítás következik abból, hogy az R^* , R'' és R' viszonya következtében az /5.155/ legkisebb megoldásában A^* éppen az első P periodus C_2 -ciklusainak μ_2^* számát, a B^* pedig a C_1 -ciklusok μ_1^* számát adja meg. Vagyis $\mu_1^* = B^*$, $\mu_2^* = A^*$, és az /5.154/c/ következtében $\kappa_2^* = B^* - A^*$. A 2. Fejezet 2.7. Tétele szerint az /5.155/ legkisebb megoldása, a ξ -hez baloldali közelítés nevezője és számlálója, amelyek relatív primek. Vagyis B^* és A^* , és következésképpen a μ_1^* , μ_2^* , κ_2^* közül bármelyik kettő, relatív primek. Ezzel bizonyítottuk a /B/ állítást és a /C/ állításbeli /5.158/c/ előállítást, kivéve az E_2^* értékét. Az /5.121/ és /5.124/ következtében azonban

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^* &= 1 - \vartheta_1^* / \eta_1^* = 1 - (\eta_1^* + \mu_2^* \tau_2^* + \kappa_2^* \eta_1^* - \mu_1^* \tau_1^*) / \eta_1^* \\ &= 1 - (\eta_1^* - \Delta^* / \tau_2^* - \eta_1^*) / \eta_1^* = \Delta^* (\tau_2^* - \eta_1^*) / \eta_1^* . \end{aligned}$$

Ezekután már csupán az /5.158/a/ és /5.158/b/ igazolása van hátra. Irjuk fel az /5.155/-öt az /5.158/c/ adatokkal. Ekkor az ekvivalens a

$$0 \leq B^* \eta_1^* - A^* (\tau_2^* - \eta_1^*) \leq_{12} \eta_1^* - \max 0, \eta_2^* - \eta_1^* /$$

egyenlőtlenséggel. Innen a $B^* = A'$, $A^* = A' - B'$ helyettesítéssel a

$$0 \leq A' \eta_1^* - (A' - B') (\tau_2^* - \eta_1^*) = B' (\tau_2^* - \eta_1^*) - A' (\tau_2^* - \tau_1^*) \leq_{12} \eta_1^* - \max 0, \eta_2^* - \eta_1^* /$$

egyenlőtlenséghez jutunk, aminek $/B', A'/$ nyilvánvalóan a legkisebb megoldása, ha $/B^*, A^*/$ legkisebb megoldása volt az előző egyenlőtlenségnek. A változó-transzformáció így igazolja az /5.158/b/ sort. Hasonlóan igazolható az /5.158/a/ sor $B^* = A' + B'$, $A^* = A'$ transzformációval.

Q.e.d.

Ennek és az 5.19. Lemmának következménye az alábbi tétel.

5.6. Tétel: Ha a $Q^* \in Q$ konfigurációra a

$$/5.160/ \text{ redukált, } \tau_1^* < \tau_2^*, 0 < \eta_1^* \leq \eta_2^*$$

feltételek teljesülnek, akkor az $R^* = R_{12}(Q^*)$ ütemterv periodikus és a Π^* jellemzőket az /5.155/ közelítési feladat legkisebb megoldásai útján kaphatjuk az /5.158/ táblázat bármelyik sora szerint és a $\mu_1^*, \mu_2^*, \kappa_2^*$ jellemzők páronként relativ primek.

Bizonyítás: Az 5.19. Lemma /5.150'/ állítása szerint az /5.160/ mellett $m'_j \equiv 1$. A redukáltság miatt $\eta_2^* < \tau_1^*$, ami $\eta_2^* \geq \eta_1^*$ miatt csak $\eta_1^* > 0$ esetén lehetséges. Vagyis az /5.160/ esetén Q^* nem elfajult. Így az 5.21. Lemma /5.153/

feltételei teljesülnek. A Lemma /A/ állítása szerint R^* valóban periódikus. Tételünk további állítása ekvivalens az 5.21. Lemma /B/ és /C/ állításaival, amelyek az /5.154/ teljesülése folytán érvényesek.

Q.e.d.

Megjegyzés: Az /5.160/ feltételben a $0 < \vartheta_1^* \leq \vartheta_2^*$ reláció helyettesíthető az /5.99/ implikációsor bármelyik tagjával.

Az 5.6. Tétel után már csupán a Q konfigurációtér azon részén nem tisztázott az $R_{12}(Q)$ ütemtervek tulajdonsága, amelyben a Q konfiguráció redukálható és Q^* redukáltjára $\tau_1^* < \tau_2^*$, $\vartheta_2^* < \vartheta_1^*$ áll fenn. Periodikus esetben az $R_{12}(Q)$ jellemzői az 5.2. Tétel szerint visszavezethetők a Q^* ütemtervnek jellemzőire. Tulajdonképpen tehát azoknak a Q^* konfigurációknak az ütemtervét kellene még tisztáznunk, amelyekre

/5.161/ redukált, $\tau_1^* < \tau_2^*$, $\vartheta_1^* > \vartheta_2^*$

feltételek teljesülnek. Ez sajnos nem sikerül teljes mértékben. A periodicitás feltétele és az ütemterv Π^* jellemzőinek a meghatározási módja nyitott kérdés. A periodicitást feltételezve természetesen az R_{12}^* -Algoritmus használható a Π^* kiszámítására. Ennek a módszernek azonban megemlítjük két hátrányát. Nem ad választ arra, hogy a μ_1^* és μ_2^* relatív primek-e, ami eddig minden egyéb speciális esetben teljesült.

Az /5.142/ határok következtében az algoritmus lépésszáma közelítőleg arányos a periodushosszal és a ciklusszámokkal. Az 5.21. Lemma előnye ezzel szemben éppen az, hogy e hiányosságok nem állnak fenn: μ_1^* és μ_2^* relatív prim volta igazolt és a lépésszám közelítőleg a ciklusszámok logaritmusával arányos.

Az 5.21. Lemma joggal veti fel azt a kérdést, hogy a μ_1^* , μ_2^* , κ_2^* közötti ismert összefüggés nem vezetheti-e mindig vissza a periodicitás és a jellemzők meghatározásának kérdését egy közelítési /vagy koincidencia/ feladat megoldására, pontosabban legkisebb megoldására, amelyre a 2. Fejezet eredményei használhatók lennének. Ha ezt általában bizonyíthatnánk, várhatóan megoldódna a μ_1^* , μ_2^* , κ_2^* közös oszthatóságának kérdése is. Ezzel kapcsolatban azt mondhatjuk, hogy periódikus esetben Π^* meghatározása valószínűleg közelítési feladat megoldására vezet, amelynek valamely ξ szám közelítései szolgáltatják a szükséges megoldását, és μ_1^* és μ_2^* relativ primnek bizonyul. Azonban biztosan nem triviális az a feladat, amelynek legkisebb megoldására van szükség, vagy nem legkisebb megoldásból származtathatók a Π^* jellemzők. E hipotézisek alapját a következő tények alkotják. Az 5.16. Lemma szerint R^* periodicitása ekvivalens olyan

$$H_j = / \varphi_j, \psi_j, \chi_j /$$

R_{12} -számhármassal létezésével, amely kielégíti a

$$0 \leq \varphi_j \tau_1^* - \psi_j \tau_2^* - \chi_j \eta_1^* \leq \eta_1^* - \max(0, \vartheta_2^* - \vartheta_1^*)$$

egyenlőtlenséget. Ugyanis az /5.120/ feltételből és a $\rho_j = \psi_j \tau_2^* + \chi_j \eta_1^* + \eta_1^* - \varphi_j \tau_1^*$ összefüggésből ezt az egyenlőtlenséget nyerjük. Ennek a legkisebb H_j megoldása szolgáltatja a μ_1^* , μ_2^* , κ_2^* jellemzőket. Az ε_2^* az /5.119/ szerint számítható ki, és ha a H_j legkisebb megoldásra

$$\Delta^* = \varphi_j \tau_1^* - \psi_j \tau_2^* - \chi_j \eta_1^*,$$

akkor $\rho_j = \eta_1^* - \Delta^*$ és az /5.119/ szerint

$$\varepsilon_2^* = \Delta^* / \eta_1^*.$$

Ezeket az eredményeket foglaljuk egy lemmába.

5.22. Lemma: Az /5.97/ feltételek mellett a Q^* konfiguráció $R^* = R_{12}(Q^*)$ ütemterve akkor és csak akkor periodikus, ha a

$$/5.162/ \quad 0 \leq \varphi \tau_1^* - \psi \tau_2^* - \chi \eta_1^* \leq'_{12} \eta_1^* - \max/0, \vartheta_2^* - \vartheta_1^*/$$

egyenlőtlenségnek létezik R_{12} -számhármass megoldása. Az R^* ütemterv Π^* jellemzőit a

$$/5.163/ \quad \Pi^* = / \varphi^*, \psi^*, \chi^*, \Delta^* / \eta_1^* /$$

szolgáltatja, ahol $H^* = / \varphi^*, \psi^*, \chi^* /$ az /5.162/ lekisebb R_{12} -számhármass megoldása és

$$/5.164/ \quad \Delta^* = \varphi^* \tau_1^* - \psi^* \tau_2^* - \chi^* \eta_1^* .$$

Bizonyítás: Kész.

Q.e.d.

Vonatkoztassuk most e lemmát az /5.161/ esetekre. A $\vartheta_1^* > \vartheta_2^*$ feltétel mellett az /5.162/ jobboldala a

$$\leq \eta_1^*$$

alakot ölti.

Tegyük fel, hogy a H_j R_{12} -számhármassok között meghatározott /és ismert/ j -től független lineáris összefüggés van. Például

$$/5.165/ \quad \varphi_j = a \psi_j + b \chi_j .$$

Akkor ez az /5.162/ megoldásaira is igaz és a $\varphi = a\psi + b\chi$ helyettesítéssel az /5.162/ átmegy a

$$/5.162'/ \quad 0 \leq b\tau_1^* - \gamma_1^* / \chi - / \tau_2^* - a\tau_1^* / \psi \leq \eta_1^*$$

egyenlőtlenségbe. Ennek megoldása esetén R^* periodikus és a megoldás /5.163/ és a lineáris összefüggés alapján

Π^* -ot szolgáltatja, ha χ^* és ψ^* legkisebb R_{12} -számhármass komponensek. Sajnos azonban az /5.162'/ nem minden megoldása R_{12} -számhármass komponens, sőt a legkisebb pozitív megoldásra sem garantálhatjuk ezt. Ezt egy példával igazoljuk.

Példa: $Q=1; 9; 8; 4/$. Erre teljesül /5.151/ feltétel $r=2$ mellett. Ez azt jelenti, hogy az 5.20. Lemma szerint

$$m_j' = 3, \quad 1 \leq j < J \quad \text{és} \quad 2 \leq m_J' \leq 3.$$

Periodikus esetben ekkor az /5.110/ definíciók és /5.122/ szerint

$$m_j = 3j, \quad 1 \leq j < J \quad \text{és} \quad 3J-1 \leq m_J \leq 3J$$

és

$$\begin{aligned} \varphi_J &= n_J + 4J - 1, \quad \psi_J = n_J + 3J - 1, \quad \chi_J = 3J - 1, \quad \text{vagy} \\ \varphi_J &= n_J + 4J, \quad \psi_J = n_J + 3J, \quad \chi_J = 3J \end{aligned}$$

következtében H_J komponensei lineárisan összefüggnek. Tényleges ütemezéssel megkaphatjuk, hogy $J=2$, $n_2=2$, $m_2=5$ és $m_2'=2=r$. A fenti φ_J , ψ_J és χ_J kifejezéseket az /5.162/-be helyettesítve viszont a

$$0 \leq /n_J-1//\tau_2^*-\tau_1^*/ - J/\tau_1^*-3(\tau_2^*-\tau_1^*)/ \leq \eta_1^*$$

egyenlőtlenség adódik, amely példánkban a

$$0 \leq 2/n_J-1/ - J \leq 1$$

egyenlőtlenség alakját ölti. Ennek legkisebb megoldásai az $n_J=1, J=0, n_J=2, J=1, n_J=2, J=2$. Ezeket helyettesítve $H_J = /0;0;-1/, H_J = /5;4;2/, illetve H_J = /9;7;5/ számhármassokat kapjuk. Ezek közül csak a harmadik R_{12} -számhármass, amely valóban az R^* jellemzőit szolgáltatja. Ez azonban nem legkisebb pozitív megoldása az /5.162'/ egyenlőtlenségnek.$

Példánk az 5.20. Lemma feltételeit elégíti ki. Az biztosítja az R_{12} -számhármassok komponensei közötti lineáris összefüggést. Az /5.162/ egyenlőtlenségnek azonban nemcsak az R_{12} -számhármass megoldásaira érvényes a szóbanforgó lineáris összefüggés, hanem egyéb megoldásaira is, és azok között a legkisebb nem feltétlenül R_{12} -számhármass.

Az alábbiakban ezért más uton, az R_{12}^* -Algoritmus elemzése útján találunk módszert az /5.161/ esetek R^* ütemterveinek vizsgálatára - legalábbis bizonyos speciális esetben.

Tegyük fel, hogy R^* ütemtervre

$$/5.166/ \quad m_j^l = m^l, \quad 1 \leq j < J \quad \text{és} \quad m^l-1 \leq m_j^l \leq m^l, \quad \text{ha } J \text{ véges,}$$

feltétel teljesül. Tudjuk, hogy a (p) sorozat csökkenései pontosan az M-szakaszok végén vannak, egyebütt (p) monoton nő. Az N-szakaszon tagonként

$$d \equiv \tau_2^* - \tau_1^*$$

a növekedés, az M-szakaszon

$$\tau_2^* - \tau_1^* = d + \eta_1^*$$

a tagonkénti növekedés, kivéve az utolsó tagot, amely

$$\tau_1^* - / \tau_2^* - \tau_1^* / = \tau_1^* - d$$

abszolút értékű csökkenéssel származik. Az N_j -szakaszon az összes növekedés $n_j d$, az M_j -szakaszon a növekedés /5.130/ szerint

$$-d'_j \doteq m'_j/d + \eta_1^* - \tau_1^*.$$

Azonban m'_j /5.128/ alatti definíciójából következően ez valójában mindig csökkenés. Tehát a (φ) sorozat az N -szakaszon nő, az M -szakaszon csökken és M -szakasz végén válhat η_1^* -nál nem-nagyobb nem-negatív értékűvé. Ha az utóbbi bekövetkezik akkor, és csak akkor, R^* periodikus az 5.16. Lemma szerint. Az /5.166/ feltevés mellett azonban a d'_j csökkenés minden M_j -szakaszon, $j < J$, egy d' állandó, legfeljebb az utolsó M_j szakaszon lehet a csökkenés más, a $d' + d + \eta_1^*$ nagyobb érték. Ez az információ szükségtelenné teszi az R_{12}^* -Algoritmusban az m' értékek számítását. Megmutatjuk, hogy így az algoritmus egy sokkal egyszerűbb algoritmussal helyettesíthető a periodikus R^* jellemzőinek meghatározására. Ezt a következő lemma tartalmazza.

5.23. Lemma: Ha egy $Q^* \in Q$ konfigurációra az /5.161/ és az /5.166/ feltételek teljesülnek, akkor az $R^* \doteq R_{12}(Q^*)$ ütemterv periodicitásának szükséges és elegendő feltétele az, hogy valamely véges $J > 0$ mellett az

$$\text{/5.167/} \quad \alpha_J^* - \frac{\eta_1^*}{d} \leq \{x_{J-1}\} \leq \alpha_J^*$$

reláció bekövetkezzék, ahol

$$\text{/5.168/} \quad x_j = \frac{\vartheta_2^* - \eta_1^*}{d} + j \frac{\tau_1^* - m'_1 \eta_1^*}{d}, \quad j=0,1,2,\dots$$

és

$$\text{/5.169/} \quad \alpha_J^* = \frac{m'_J/d + \eta_1^* - \tau_1^* - \vartheta_2^*}{d}, \quad d = \tau_2^* - \tau_1^*.$$

Itt m'_j az /5.166/-feltételben szereplő $m'_j = m'$ vagy $m'_j = m' - 1$ érték, amelyet ismertnek tételezünk fel. Az /5.167/ bekövetkezése esetén R^* jellemzői

$$\begin{aligned} \mu_1^* &= [X_{J-1}] + m'_J + J, & \mu_2^* &= [X_{J-1}] + m'_J, \\ /5.170/ & & & \\ \kappa_2^* &= /J-1/m' + m'_J, & \varepsilon_2^* &= 1 - \vartheta_J / \eta_1^*, \end{aligned}$$

ahol

$$/5.171/ \quad \vartheta_J = \vartheta_2^* - \tau_1^* + m'_J/d + \eta_1^* / - \{X_{J-1}\}_d.$$

Bizonyítás: Először is bizonyítjuk, hogy

$$/5.171'/ \quad \vartheta_j = \vartheta_2^* - \tau_1^* + m'/d + \eta_1^* / - \{X_{j-1}\}_d, \quad j=1, 2, \dots, J-1.$$

Eszerint $j=1$ mellett az /5.125/ figyelembevételével

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \vartheta_2^* - \tau_1^* + m'/d + \eta_1^* / - \{(\vartheta_2^* - \eta_1^*)/d\}_d = \\ &= \eta_1^* + \left[\frac{\vartheta_2^* - \eta_1^*}{d} \right]_{d+m'/d} + \eta_1^* / - \tau_1^* = \vartheta_{n_1}^* + m'/\tau_2^* - \vartheta_1^* / - \tau_1^* \end{aligned}$$

és ez megegyezik az /5.130/ formulával $j=1$ és $m'_1 = m'$ mellett.

Legyen most $1 < j < J$ és tegyük fel, hogy az /5.171'/ igaz $/j-1/-$ ig bezárólag, $/j-1/re$

$$\vartheta_{j-1} = \vartheta_2^* - \tau_1^* + m'/d + \eta_1^* / - \{X_{j-2}\}_d.$$

Ennek alapján

$$\frac{\vartheta_2^* - \vartheta_{j-1}}{d} = \frac{\tau_1^* - m' \eta_1^*}{d} - m' + X_{j-2} - [X_{j-2}] = X_{j-1} - m' - [X_{j-2}].$$

Igy az /5.125/ szerint

$$/5.172/ \quad n'_j = [X_{j-1}] - m' - [X_{j-2}].$$

Ezt és a ρ_{j-1} formuláját az /5.126/-ba téve

$$\begin{aligned} \rho'_{k_{j-1}+n'_j} &= \vartheta_2^* - \tau_1^{*+m'/d} \eta_1^* / - \{X_{j-2}\}^d + [X_{j-1}]^d - m'd - [X_{j-2}]^d = \\ &= \vartheta_2^* - \frac{\tau_1^{*-m'} \eta_1^*}{d} d - X_{j-2}^d + [X_{j-1}]^d = \vartheta_2^* - \{X_{j-1}\}^d \end{aligned}$$

adódik. Ezt a /5.130/-ba helyettesítve kapjuk az /5.171'/ formulát.

Az 5.16. Lemma szerint R^* periodicitásának feltétele az, hogy valamely véges $j=J$ értékre $0 \leq \rho_j \leq \eta_1^*$ bekövetkezzék. Ha $m'_j = m'$, akkor az /5.171'/ bizonyítása $j=J$ mellett is érvényes és az /5.171'/ azonos az /5.171/ formulával. Ha $m'_j = m' - 1$, akkor az /5.130/ formulából

$$\rho_J = \vartheta_2^* - \{X_{J-1}\}^d + m'_J/d + \eta_1^* / - \tau_1^*$$

ismét pontosan az /5.171/ kifejezés. Ha az /5.171/-et a $0 \leq \rho_j \leq \eta_1^*$ egyenlőtlenségbe helyettesítjük, akkor az átrendezve éppen az /5.167/ feltételt szolgáltatja az /5.168/ és /5.169/ definíciókkal.

Az /5.172/ összegezésével, $n'_1 = [X_0]$ figyelembevételével, $n_J = [X_{J-1}] - J - 1/m'$ adódik. Az /5.166/ alapján $m_J = J - 1/m' + m'_J$. Ezeket az /5.134/-be helyettesítve az /5.170'/ adódik.

Q.e.d.

Ez a lemma lehetővé teszi, hogy az 5.19. és 5.20. Lemmák feltételei mellett tisztázzuk az R^* ütemterv periodicitását és meghatározzuk jellemzőit. Ehhez írjuk fel az /5.168/ alatti X_j és /5.169/ alatti α_j^* kifejezéseit a következőképpen:

$$/5.168'/ \quad X_j = 1 + jm' + \frac{\vartheta_1^* - \eta_2^*}{d} + j \left(\frac{\vartheta_1^* - \eta_2^*}{d} + \frac{\eta_1^{*-m'/d} + \eta_1^* /}{d} \right)$$

$$/5.169'/ \quad \alpha_J^* = 1 + \frac{\eta_1^*}{d} - \frac{\eta^{*-m'}/d + \eta_1^*/}{d} - \frac{/m' - m_J^*/d + \eta_1^*/}{d} .$$

Az 5.23. Lemma szerint R^* akkor és csak akkor periodikus, ha az /5.167/ bekövetkezik.

Tegyük fel most, hogy az /5.151/ feltétel teljesül valamely $m' > 1$ egész mellett. Ez azt jelenti, hogy $\eta^{*-m'}/d + \eta_1^*/ = 0$ és ezért az /5.169'/-ből

$$/5.169''/ \quad \alpha_J^* - \frac{\eta_1^*}{d} = 1 - \frac{/m' - m_J^*/d + \eta_1^*/}{d} .$$

Emiatt véges J esetén $m'_J = m'$ lehetetlen, mert az $\{X_{J-1}\} \geq \alpha_J^* - \frac{\eta_1^*}{d} = 1$ ellentmondást eredményezné. Vagyis az 5.20. Lemma pontosításaként kaptuk:

5.20' Lemma: Ha van olyan $m' > 1$ egész, hogy

$$/5.151'/ \quad m' / \tau_2^* - \eta_1^* / = \eta^* \quad / = \eta_1^* + \eta_2^* / ,$$

akkor

$$/5.173/ \quad m'_j = m' , \quad 1 \leq j < J , \quad m'_J = m' - 1 .$$

Bizonyítás: Véges J -re fentebb beláttuk, $J = \infty$ esetén pedig figyelmen kívül hagyandó az $m'_J = m' - 1$.

Q.e.d.

Az /5.173/ felhasználásával azonban az /5.167/ kritérium a $-\eta_1^*/d \leq \{X_{J-1}\} \leq 0$ alakot ölti, hiszen $\alpha_J^* = 0$. Ez a kritérium azonban csupán $\{X_{J-1}\} = 0$, azaz X_{J-1} egész esetén teljesülhet. Az /5.151'/ feltétel mellett az /5.168'/-ből

$$/5.168"/ \quad X_j = 1 + jm' + /j+1/ \frac{\eta_1^* - \eta_2^*}{d},$$

amely csak akkor válhat egésszé, ha

$$\frac{\eta_1^* - \eta_2^*}{d} = \frac{A}{B}, \quad A, B > 0 \text{ relativ prim egészek,}$$

racionalis szám és $j+1=B$. Ezzel bizonyítottuk a következő tételt.

5.7. Tétel: Ha a $Q^* \in Q$ konfigurációra az /5.161/ feltételek és ezenfelül az /5.151/ feltétel teljesül valamely $m' > 1$ egész mellett, akkor az $R^* = R_{12}(Q^*)$ ütemterv akkor és csak akkor periodikus, ha

$$/5.174/ \quad \frac{\eta_1^* - \eta_2^*}{\tau_2^* - \tau_1^*} = \frac{A}{B}, \quad A, B > 0 \text{ relativ prim egészek,}$$

egy racionalis szám. Ekkor az R^* jellemzői

$$/5.175/ \quad \Pi^* = /(m'+1)B+A; m'B+A; m'B-1; 1/$$

és itt

$$/5.176/ \quad \mu_1^* \text{ és } \mu_2^* \text{ relativ primek.}$$

Bizonyítás: Elemzésünk szerint az X_{j-1} -re pontosan akkor fog teljesülni az /5.167/ kritérium, ha $J=B$. Az /5.171/-ből $m'_J = m' - 1$ figyelembevételével $\rho_J = -\eta^* + m'/d + \eta_1^*/ = 0$. Az /5.168'/-ből $X_{j-1} = 1 + /B-1/ m' + A$. Ezeket az /5.170/ formulákba helyettesítve az /5.175/ jellemzőket nyerjük. Mivel A, B relativ primek B és $m'B+A$ is azok, márpedig $\mu_1^* - \mu_2^* = B$, $\mu_2^* = m'B + A$. Ezért μ_1^* és μ_2^* valóban relativ primek.

Q.e.d.

Ez a tétel azért is érdekes, mert megmutatja, hogy R^* lehet nem-periodikus akkor is, amikor Q^* nem-elfajult.

Tegyük fel most, hogy a Q^* konfigurációra az /5.149/ feltétel is teljesül az /5.97/ feltételeken kívül. Ekkor $m'_j = m'$, ezért véges J esetén is $m'_J = m'$. Ebben az esetben az /5.169'/-ből

$$\text{/5.169''/} \quad \alpha_J^* - \frac{\eta_1^*}{d} = 1 - \frac{\eta^{*-m'}/d + \eta_1^*}{d}.$$

Az /5.149/ szerint $0 < \eta^{*-m'}/d + \eta_1^* \leq \eta_1^*$ és ezért $\alpha_J^* - \eta_1^*/d < 1$. Azonban $\alpha_J^* \geq 1$, vagyis az /5.167/ kritérium ekvivalens az

$$\text{/5.167'/} \quad \alpha_J^* - \frac{\eta_1^*}{d} \leq \{X_{J-1}\} < 1$$

kritériummal. Az /5.168'/ szerint

$$\{X_j\} = \{y + j/y+x/\}$$

alakú, ahol

$$x = \frac{\eta^{*-m'}/d + \eta_1^*}{d}, \quad y = \frac{\eta_1^* - \eta_2^*}{d}.$$

Tudjuk, hogy ha $y+x$ irracionális, akkor az $\{y + j/y+x/\}$, $j=0,1,\dots$ sorozat a $[0,1)$ intervallumban mindenütt sűrű /sőt egyenletes eloszlású [K11]/, ezért az /5.167'/ biztosan bekövetkezik véges $j=J-1$ értékre. Tegyük fel most, hogy

$$y + x = \frac{A}{B}, \quad A, B > 0 \text{ relativ prim egészek,}$$

egy racionális szám. Ekkor $y=A/B-x$ és

$$\{x_j\} = \left\{ \frac{A}{B} - x + j \frac{A}{B} \right\} = \left\{ 1 - x + \frac{j+1}{B} \frac{A}{B} \right\}.$$

Az /5.169'''/-ből

$$\alpha_J^* - \frac{\gamma_1^*}{d} = 1 - x.$$

Ezekből az következik, hogy legkésőbb a $J=B$ értéknél az /5.167'/ teljesülni fog. Azonban az $\{x_j\}$, $j=0,1,\dots$ sorozat egyenletes eloszlású az $\{1-x\} \pm \frac{k}{B} \in [0,1)$ "eltolt" osztópontokon és $x > \frac{1}{B}$ esetén az /5.167'/ már $J < B$ mellett is teljesülhet. Ezzel készen vagyunk egy újabb tétel bizonyítására.

5.8. Tétel: Ha a $Q^* \in Q$ konfigurációra az /5.161/ feltételek és ezenfelül az /5.149/ feltétel teljesül valamely $m' \geq 1$ egész mellett, akkor az $R^* = R_{12}(Q^*)$ ütemterv mindig periodikus és jellemzőit az /5.170/ formulák adják meg, ahol $m'_J = m'$ és J a legkisebb egész, amelyre az /5.167/ kritérium teljesül.

A Π^* jellemzők meghatározhatók még a következő módon is:

$$\text{/5.176/} \quad \Pi^* = / B^* + A^*; A^*; m' B^*; \frac{\Delta^* / \tau_2^* - \tau_1^*}{\gamma_1^*} / ,$$

ahol B^* , A^* a legkisebb pozitív megoldása a

$$\text{/5.177/} \quad 0 \leq B \xi^* - A < \alpha^*$$

közelítési feladatnak, amelyben

$$/5.178/ \quad \xi^* = \frac{\tau_1^{*-m'} \eta_1^*}{\tau_2^* - \tau_1^*}, \quad \alpha^* = \frac{\eta_1^* + \eta_2^{*-m'} / \tau_2^* - \eta_1^*}{\tau_2^* - \tau_1^*}$$

és

$$/5.179/ \quad \Delta^* = B^* \xi^* - A^*$$

a megoldás hibája. Az /5.176/-ban

/5.180/ μ_1^* és μ_2^* relativ primek.

Bizonyítás: A tétel első része bizonyítva van. Csupán az /5.176/ és /5.180/ bizonyítandók. Az /5.180/ azonban nyilvánvaló, hiszen B^*, A^* relativ primek a 2. Fejezet eredményei szerint, amelyek az /5.177/ megoldásaira vonatkoznak. Ugyancsak az ottani eredmények szerint az /5.177/ mindig megoldható $\alpha^* > 0$ esetén. Márpedig az /5.149/ ezt a feltételt most biztosítja.

Az /5.149/ következtében, továbbá az /5.169'''/ szerint $\alpha_J^* - \eta_1^*/d < 1$ és az /5.167'/ teljesülésekor

$$/5.167''/ \quad \alpha_J^* - \frac{\eta_1^*}{d} \leq x_{J-1} - [x_{J-1}] < 1,$$

ezért

$$\begin{aligned} [x_{J-1} - (\alpha_J^* - \frac{\eta_1^*}{d})] &= [x_{J-1}] \text{ és} \\ \{x_{J-1} - (\alpha_J^* - \frac{\eta_1^*}{d})\} &= \{x_{J-1}\} - (\alpha_J^* - \frac{\eta_1^*}{d}). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az /5.167''/ kritérium ekvivalens olyan legkisebb B^*, A^* egészek létezésével, amelyekre

$$/5.167'''/ \quad 0 \leq x_{B^*-1} - (\alpha_J^* - \frac{\eta_1^*}{d}) + m' - A^* < 1 - (\alpha_J^* - \frac{\eta_1^*}{d}).$$

Ekkor

$$J = B^* \quad \text{és} \quad [X_{J-1}] = A^* - m' \quad \text{és}$$

$$\Delta^* = \{X_{J-1}\} - \left(\alpha_{J-1}^* - \frac{\eta_1^*}{d} \right) = \{X_{J-1}\} + \frac{\eta^{*-m'}/d + \eta_1^*/d}{d} - 1.$$

A Δ^* segítségével kifejezett $\{X_{J-1}\}$ -et az /5.171/-be helyettesítve

$$\vartheta_J = \vartheta_2^* - \tau_1^{*+m'}/d + \eta_1^*/d + \eta^{*-m'}/d + \eta_1^*/d - \Delta^*_d = \eta_1^* - \Delta^*_d.$$

A J , $[X_{J-1}]$ és ϑ_J értékeket az /5.170/-be helyettesítve $m'_J = m'$ figyelembevételével azonnal adódnak az /5.176/ jellemzők. Azt kell még megmutatnunk, hogy az /5.167'''/ azonos az /5.177/-tel. Az /5.168/ és /5.169'''/ alapján azonban ez helyettesítéssel nyilvánvaló.

Q.e.d.

1. Megjegyzés: Az /5.149/ feltétel esetén $m'_j \equiv m'$ miatt az /5.110/ és /5.122/ definíciókból az R_{12} -számhármassokra

$\varphi_j = n_j + jm' + j$, $\psi_j = n_j + jm'$, $\chi_j = jm'$, $j=1,2,\dots,J$, teljesül és ez közöttük a

$$\text{/5.181/} \quad \chi_j = m' / \varphi_j - \psi_j / , \quad 1 \leq j \leq J ,$$

összefüggést idézi elő. Ha ezt az összefüggést az /5.162/ egyenlőtlenségben figyelembe vennénk, abból

$$0 \leq \varphi_j - \psi_j / \frac{\tau_1^{*-m'} \eta_1^*}{\tau_2^* - \tau_1^*} - \psi_j \leq_{12} \frac{\min / \eta_1^*, \tau_1^* - \vartheta_2^* /}{\tau_2^* - \tau_1^*}$$

egyenlőtlenséghez jutnánk, amely csupán jobboldalában tér el az /5.177/ egyenlőtlenségtől, mégpedig $m' > 1$ esetben a

$$\text{/*/} \quad 0 \leq B \xi^* - A \leq \frac{\eta_1^*}{\tau_2^* - \tau_1^*}$$

egyenlőtlenséget adja szemben az /5.177/-tel, amely

$$0 \leq B\xi^* - A < \alpha^* \leq \frac{\eta_1^*}{\tau_2^* - \tau_1^*}.$$

Ez az eltérés döntő. Addig ugyanis, amíg $/\pi/$ legkisebb pozitív megoldásai nem mindig szolgáltatnak R_{12} -számhármasokat, az /5.177/ legkisebb pozitív megoldásai ilyeneket, és következésképpen R^* jellemzőit, szolgáltatják. Tekintsük például a $Q^* = 2; 7; 5; 5/$ konfigurációt, amelyre az /5.149/ teljesül $m' = 2$ mellett. Ennél $/\pi/$ $0 \leq 5B - A \leq 2$, amelynek legkisebb megoldása $B = 1$, $A = 3$ és ennek alapján $\Pi^* = 4; 3; 2; 1/$ adódna, holott az /5.177/ szerinti $0 \leq 5B - A < 1$ legkisebb megoldása $B^* = 1$, $A^* = 5$ adja a helyes $\Pi^* = 6; 5; 2; 0/$ jellemzőket.

2. Megjegyzés: Az 5.8. Tétel speciális esete $m' = 1$ mellett az 5.21. Lemma /C/ állításában az /5.158/a/ sornak megfelelő megoldás. Ha ugyanis $m' = 1$, akkor az /5.178/ szerint

$$\xi^* = \frac{\eta_1^*}{\tau_2^* - \tau_1^*} \quad \text{és} \quad \alpha^* = \frac{\tau_1^* - \eta_2^*}{\tau_2^* - \tau_1^*} \leq \frac{\eta_1^*}{\tau_2^* - \tau_1^*},$$

az utóbbi egyenlőtlenség az /5.149/ következtében $m' = 1$ mellett. Ezért

$$\alpha^* = \frac{\min/\eta_1^*, \tau_1^* - \eta_2^*/}{\tau_2^* - \tau_1^*} = \frac{\eta_1^* - \max/0, \eta_2^* - \eta_1^*/}{\tau_2^* - \tau_1^*},$$

éppen az /5.158/a/ alatti érték.

Az 5.7. és 5.8. Tételekkel tisztáztuk R^* tulajdonságait az /5.166/ esetekben is, amely az /5.161/ feltételek meghatározta konfigurációhalmaz részét jelenti, és csupán az 5.7. Ábrán nem vonalkázott konfigurációsávokban nyitott R^* tulajdonságainak kérdése. Ilyen sávok kizárólag az /5.161/

esetben lehetnek, amelyből $\eta_1^* < \eta_2^*$ is következik. $\eta_1^* \geq \eta_2^*$ ugyanis az /5.99/ implikációsor alapján $\eta_1^* \leq \eta_2^*$ relációt vonná maga után, amely/5.161/-nek ellentmond. $\eta_1^* < \eta_2^*$ esetén azonban az 5.7. Ábrán mindig van olyan sáv, ahol az /5.149/ és /5.151/ nem teljesül. Legalább egy $(\eta_2^* - \eta_1^*)/2$ szélességű sáv ugyanis a $\eta_1 = \eta_2$ egyenes alatt biztosan ilyen.

Sajnos az /5.145/ vagy /5.147/ feltételek teljesülése esetén nem sikerül az /5.149/ és /5.151/ feltételekhez hasonlóan többet mondanunk az R^* tulajdonságairól. Ez alól egy kivétel minden esetre az, amikor az /5.147/ feltétel teljesül $n^1=0$ mellett. Erre a következő tétel vonatkozik. Ez általánosabb annyiban, hogy az /5.147/-nek megfelelő $\eta_1 - \eta_2 = 0$ feltételen kívül lényegében mást nem kellene korlátoznunk. A már tisztázott eseteket kizárva azonban a tétel egyszerűbb.

5.9. Tétel: Ha a $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációnál a

/5.182/ nem-elfajult, $\eta_2 = \eta_1$

feltételek teljesülnek, akkor az $R_{12} \doteq R_{12}(Q)$ ütemterv mindig periodikus

/5.183/ $\Pi = / A+B; B; B-1; 1 - \frac{\Delta\tau_1}{\eta_1} /$

jellemezőkkel, ahol B, A a legkisebb pozitív megoldása a

/5.184/ $0 \leq B\xi - A \leq \alpha$

egyenlőtlenségnek, amelyben

/5.185/ $\xi = \frac{\eta_2}{\tau_1}, \quad \alpha = \frac{\eta_1}{\tau_1}$

és

$$/5.186/ \quad \Delta = B\xi - A$$

a megoldás hibája. A jellemzők közül a

$$/5.187/ \quad \mu_1 \text{ és } \mu_2 \text{ relativ primek.}$$

Bizonyítás: $\eta_2 = \vartheta_1$ miatt csupán azok az A_2 -task-ok nem lesznek megszakítva az R_{12} ütemtervben, amelyek pontosan egy A_1 -task után indulnak. Vagyis a β_1 -szituációk utáni A_2 -task-ok. Eszerint minden periodusban pontosan egy nem-megszakított A_2 -task ütemeződik, a többi megszakított. $\eta_2 = \vartheta_1$ miatt egy A_2 -task nem lehet többször megszakítva, ezért a C_2 -ciklusok kiszolgálási ideje az első periodusban egyöntetűen $\tau_2 + \eta_1$, ha az elsőhöz hozzászámítjuk a kezdeti η_1 késleltetést. Vagyis a ciklusvégzódések: $f_k = k/\tau_2 + \eta_1$. A β_1 -szituáció pontosan abban az $f(C_1, \mu_1) + \eta_1$ pontban tér vissza először, amelyhez van μ_2 úgy, hogy

$$0 \leq \mu_2 / \tau_2 + \eta_1 - \mu_1 \tau_1 \leq \eta_1$$

teljesüljön. $\tau_2 + \eta_1 = \tau_1 + \vartheta_2 > \tau_1$, ezért $\mu_2 \leq \mu_1$. Az $\eta_2 = \vartheta_1$ helyettesítéssel az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$0 \leq \mu_2 \vartheta_2 - (\mu_1 - \mu_2) \tau_1 \leq \eta_1$$

egyenlőtlenséggel. Ha tehát B,A az /5.184/ legkisebb pozitív megoldása, akkor $\mu_1 = A+B$ és $\mu_2 = B$ és ezek relativ primek. Korábbi megfontolásunk szerint $\kappa_2 = \mu_2 - 1 = B - 1$. Nyilvánvalóan a fenti egyenlőtlenségbeli középső tag értéke $\Delta\tau_1$, és ez az $f(C_2, \mu_2)$ és az $f(C_1, \mu_1)$ ciklusvégzódések közötti távolság, amely $\eta_1 - \varepsilon_2 \eta_1$. $\eta_1 - \varepsilon_2 \eta_1 = \Delta\tau_1$ egyenlőségből $\varepsilon_2 = 1 - \Delta\tau_1 / \eta_1$ az /5.183/ alatti jellemző.

Q.e.d.

Ennek a tételnek a következménye, hogy a redukált konfigurációknál is az $\eta_2^* = \eta_1^*$ esetben R^* ütemterv periodikus és jellemzőit közelítési feladat megoldásából határozhatjuk meg. Az $\eta_2^* = \eta_1^*$ eset a 4.8. Ábrán a függőleges határegyenesnek felel meg.

5.5. Az R_{12} ütemtervek hatékonyságának meghatározása

Egy tetszőleges ütemterv hatékonyságát a /3.1/ definíció szerint a

$$/5.188/ \quad \gamma_{12} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau^A(t)}{t}$$

határérték szolgáltatja, ahol $\tau^A(t)$ az R_{12} ütemterv $[0, t)$ szakaszának P_A -foglaltságát jelöli. Nyilvánvaló, hogy a hatékonyságot nem befolyásolja egy véges szakasz P_A -foglaltsága, így a definíciónál az R_{12} ütemterv $[0, \eta_1)$ szakaszát figyelmen kívül hagyhatjuk és írhatjuk, hogy

$$/5.188'/ \quad \gamma_{12} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau^A[\eta_1, t)}{t - \eta_1},$$

ahol $\tau^A[a, b)$ az $[a, b)$ szakasz P_A -foglaltsága.

Vezessük be a

$$\mu_1(t), \mu_2(t), \kappa_2(t), \rho_1(t), \rho_2(t)$$

függvényeket, mint a t pillanatig befejezett C_1 -ciklusok, C_2 -ciklusok, megszakítások számát, illetve

$$\rho_i(t) = \tau_i - \beta^{(i)}(t), \quad i=1,2,$$

mennyiségeket, ahol $\beta^{(i)}(t)$ a 3. Fejezetben definiált $\delta(t)$ szituációfüggvény komponensei.

Tudjuk, hogy az R_{12} ütemtervekben a megszakításokon kívül késleltetés csak a β_1 -szituációk előtt lehetséges. Az R_{12} ütemtervek $t = \eta_1$ pontjában mindig β_1 -szituáció lép fel /kivéve $\eta_1 = 0$ esetet/, itt a késleltetés η_1 . Az $[\eta_1, \infty)$ szakaszon megszakításon kívül csak akkor lehet késleltetés, ha a β_1 -szituáció visszatérő. Ekkor azonban R_{12} periodikus és a hatékonyságot az 5.1. Tétel adataiból meghatározhatjuk a periodus jellemzőiből. Ha R_{12} nem periodikus, akkor a hatékonyságát tetszőlegesen közelíthetjük.

Eredményeinket egy tételbe foglaljuk. A tétel bármilyen elfajulás esetén is érvényes, ha megállapodunk abban, hogy $0/0=0$ legyen.

5.10.Tétel:

/A/ Bármely periodikus R_{12} ütemterv hatékonysága

$$/5.189/ \quad \gamma_{12} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} - \frac{\kappa_2 + \varepsilon_2}{\mu_1} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)},$$

ahol μ_1 , κ_2 , ε_2 az 5.1.Tételben és az azt követő 2.Megjegyzésben szereplő jellemzők.

/B/ Bármely nem-periódikus R_{12} ütemterv hatékonysága aszimptotikusan a megszakító A_1 -task-ok relatív számától függ, nevezetesen

$$/5.189'/ \quad \gamma_{12}[\eta_1, t) \sim \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} - \frac{\kappa_2(t)}{\mu_1(t)} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} \sim \gamma_{12},$$

ahol $\mu_1(t)$ a t pontig befejezett A_1 -task-ok száma, $\kappa_2(t)$ pedig közülük a megszakítást okozó A_1 -task-ok száma.

/C/ Az /5.97/ feltételek esetén a $t=f(C_{1,k_j}) \doteq t_j$ ciklusvégződésekre, amelyek M -szakaszok végén lépnek fel, a $\mu_1(t) = \rho_j$, $\kappa_2(t) = \chi_j$ használható az /5.189'/ formulában és

$$/5.190/ \quad \gamma_{12}^*[\eta_1^*, t_j + \eta_1^*) = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} - \frac{\chi_j}{\rho_j} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} - \frac{\eta_1^* - \rho_j}{\rho_j \eta_1^*} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)}$$

egészen az első periódus utolsó M -szakaszáig bezárólag, ha R_{12} periodikus és az ütemterv mentén végig, ha R_{12} nem-periódikus.

Bizonyítás: Legyen először R_{12} periodikus. Ha $\vartheta_1 \tau_2 > 0$, akkor a periódushosszat és P_A -foglaltságot az /5.65/ ill. /5.66/ formulák szolgáltatják. A 3.5.Lemma szerint ekkor a hatékonyság

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \frac{a_{12}}{p_{12}} = \frac{\mu_1 \eta_1}{\mu_1 \tau_1} + \frac{\mu_2 \eta_2}{\mu_2 \tau_2 + \kappa_2 + \varepsilon_2 / \eta_1} = \\ &= \gamma^{(1)} + \left(1 - \frac{\kappa_2 + \varepsilon_2 / \eta_1}{p_{12}}\right) \gamma^{(2)} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} - \frac{\kappa_2 + \varepsilon_2}{\mu_1} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)}. \end{aligned}$$

Vagyis az /5.189/ igaz. Az 5.1.Tétel utáni 2.Megjegyzés szerint $\tau_1 = 0$ esetben $\kappa_2 + \varepsilon_2 = 0$, $\mu_1 = 1$ és megállapodás szerint $\gamma^{(1)} = 0$. Ezeket az /5.189/-be helyettesítve $\gamma_{12} = \gamma^{(2)}$ a helyes hatékonyság.

$\eta_1 > 0$, $\vartheta_1 = 0$, $\tau_2 \geq 0$ esetén a 2. Megjegyzés szerint $\kappa_2 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_1 = 1$ és $\gamma^{(1)} = 1$, amelyeket az /5.189/-be téve $\gamma_{12} = 1$ helyes eredményt kapunk. Végül $\vartheta_1 > 0$, $\tau_2 = 0$ elfajult esetben $\mu_1 = \kappa_2 = \varepsilon_2 = 0$ és $\gamma^{(2)} = 0$, amelyeket helyettesítve, a $0/0 = 0$ megállapodás mellett, a $\gamma_{12} = \gamma^{(1)}$ helyes eredményt szolgáltatják. Ezzel az /A/ állítást bizonyítottuk.

Legyen most R_{12} nem-periódikus. Ekkor a $Q^{(2)}$ job-folyam kezdeti η_1 késleltetésén túl csak megszakítás miatt vannak késleltetések, megszakításonként η_1 . Definiálva a

$$\delta_i(t) = \begin{cases} \rho_i(t) / \eta_i \quad / \leq 1 / , & \text{ha } \rho_i(t) \leq \eta_i \\ 1 & , \text{ha } \rho_i(t) \geq \eta_i \end{cases} \quad i=1,2,$$

függvényeket, az R_{12} ütemterv $[\eta_1, t)$ szakaszán a P_A -foglaltság így írható fel:

$$\tau^A[\eta_1, t) = (\mu_1(t) + \delta_1(t) - 1) \eta_1 + (\mu_2(t) + \delta_2(t)) \eta_2 .$$

A t a következő két alternatív módon írható fel:

$$t = \mu_1(t) \tau_1 + \rho_1(t) = \eta_1 + \mu_2(t) \tau_2 + \kappa_2(t) \eta_1 + \rho_2(t) .$$

Ezekből

$$\begin{aligned} \gamma_{12}[\eta_1, t) &= \frac{(\mu_1(t) + \delta_1(t) - 1) \eta_1}{\mu_1(t) \tau_1 + \rho_1(t) - \eta_1} + \frac{(\mu_2(t) + \delta_2(t)) \eta_2}{\mu_2(t) \tau_2 + \kappa_2(t) \eta_1 + \rho_2(t)} = \\ &= \left(1 - \frac{A_1(t)}{\mu_1(t)}\right) \gamma^{(1)} + \left(1 - \frac{A_2(t)}{\mu_1(t)}\right) \gamma^{(2)} - \frac{\kappa_2(t)}{\mu_1(t)} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} , \end{aligned}$$

ahol

$$/5.191/ \quad |A_1(t)| = \left| \frac{\rho_1(t) - \eta_1 - (\delta_1(t) - 1) \tau_1}{\tau_1 + (\rho_1(t) - \eta_1) / \mu_1(t)} \right| < 2$$

$$/5.191'/ \quad |A_2(t)| = \left| \frac{\rho_2(t) - \delta_2(t) \tau_2 - \gamma^{(1)} \kappa_2(t) (\rho_1(t) - \eta_1) / \mu_1(t)}{\tau_1 + (\rho_1(t) - \eta_1) / \mu_1(t)} \right| < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} ,$$

korlátosak. Ezért, ha $t \rightarrow \infty$, akkor a $\mu_1(t) = \left\lceil \frac{t}{\tau_1} \right\rceil \rightarrow \infty$

miatt aszimptotikusan valóban teljesül az /5.189'/. Ezzel bizonyítottuk a /B/ állításunkat is.

Legyenek most a Q^* konfigurációra igazak az /5.97/ alatti feltételek. Ekkor alkalmazható az R_{12}^* -Algoritmus a $H_j = / \varphi_j, \psi_j, \chi_j /$ R_{12} -számhármassok meghatározására. Az /5.123/ felhasználásával $j \leq J$ mellett

$$t_j + \eta_1^* - \eta_1^* = \varphi_j \tau_1^* = \eta_1^* + \psi_j \tau_2^* + \chi_j \eta_1^* - \rho_j$$

és nyilvánvalóan

$$\tau^A[\eta_1^*, t_j + \eta_1^*] = \varphi_j \eta_1^* + \psi_j \eta_2^* .$$

Ezért

$$\begin{aligned} \gamma_{12}^* &= \frac{\varphi_j \eta_1^*}{\varphi_j \tau_1^*} + \frac{\psi_j \eta_2^*}{\psi_j \tau_2^* + \chi_j \eta_1^* + \eta_1^* - \rho_j} = \gamma^{(1)} + \left(1 - \frac{\chi_j \eta_1^* + \eta_1^* - \rho_j}{\varphi_j \tau_1^*}\right) \gamma^{(2)} = \\ &= \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} - \frac{\chi_j \gamma^{(1)} \gamma^{(2)}}{\varphi_j} - \frac{\eta_1^* - \rho_j}{\varphi_j \eta_1^*} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} \end{aligned}$$

az /5.190/ formulának megfelelően.

Q.e.d.

1.Megjegyzés: Ha R_{12}^* periodikus, akkor $j=J$ mellett $\eta_1^* - \rho_j = \varepsilon_2^* \eta_1^*$,

$\chi_j = \kappa_2^*$ és $\varphi_j = \mu_1^*$ és az /5.190/ átmege az /5.189/ formulába.

Ha $j \neq J$, akkor $\rho_j > \eta_1^*$ és

$$\gamma_{12}^*[\eta_1^*, t_j + \eta_1^*] > \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} - \frac{\chi_j}{\varphi_j} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} ,$$

míg $j=J$ esetben $\rho_j \leq \eta_1^*$ és

$$\gamma_{12}^*[\eta_1^*, t_J + \eta_1^*] \leq \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} - \frac{\chi_J}{\varphi_J} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} .$$

2.Megjegyzés: Ha R_{12} nem periodikus, akkor $\eta_1^* < \rho_j < \tau_1^*$ korlá-
tos volta miatt

$$\gamma_{12}^*[\eta_1^*, t_j + \eta_1^*] \sim \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} - \frac{\chi_j}{\varphi_j} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} ,$$

hiszen $j \rightarrow \infty$ esetén $\varphi_j \rightarrow \infty$. Az ismert nem-periodikus eseteket sorra véve az 5.12.Lemma szerint $\eta_1 \tau_2 > 0$, $\eta_1 \tau_2 = 0$ esetben R_{12}

akkor nem-periodikus, ha a ϑ_1/τ_2 irracionális. $\eta_1=0$ esetén $\gamma^{(1)}=0$, amit figyelembe véve az /5.189/-/5.190/ bármelyike a $\gamma_{12}=\gamma^{(2)}$ helyes hatékonyságot eredményez. A $\vartheta_2=0$ esetben minden A_1 -task megszakító, ezért $\kappa_2(t)=\mu_1(t)$, amit az /5.189'/-ben figyelembe véve $\gamma_{12} \sim \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} = 1$, hiszen most $\gamma^{(2)} = 1$. Végül, ha az /5.161/ és valamely $m' > 1$ mellett az /5.151/ feltétel teljesül, akkor az 5.7.Tétel szerint R_{12}^* nem-periodikus, ha $(\vartheta_1^* - \eta_2^*)/(\tau_2^* - \tau_1^*)$ iracionális szám. Az /5.151/ azt jelenti, hogy $\eta_1^* + \eta_2^* = m'(\tau_2^* - \vartheta_1^*)$. Az 5.20.Lemma szerint ekkor $m_j' \equiv m'$, $m_j = jm'$, $\chi_j = jm'$, $\varphi_j = n_j + j/m' + 1/$. Ezeket az /5.190/-ben figyelembe véve

$$/5.190'/ \quad \gamma_{12}^* [\eta_1^*, t_j + \eta_1^*] = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} - \frac{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}{m' + 1 + n_j/j} \left(m' - \frac{\varphi_j - \eta_1^*}{j\eta_1^*} \right)$$

formulát kaphatjuk. Mivel $n_j' < \bar{n}$ és $(\varphi_j - \eta_1^*)/\eta_1^* < \vartheta_1^*/\eta_1^*$

korlátosak, $j \rightarrow \infty$ esetén

$$/5.190''/ \quad \gamma_{12}^* = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} - \frac{m'}{m' + 1 + \tilde{n}} \gamma^{(1)}\gamma^{(2)},$$

ahol

$$\tilde{n} = \lim_{j \rightarrow \infty} n_j/j = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j n_i'$$

az (n') sorozat átlagértéke, amely az /5.138/ és /5.139/ figyelembevételével a $(\xi - 1, \xi + 1)$ intervallumba esik, ahol

$\xi = (\vartheta_1^* - \eta_2^*)/(\tau_2^* - \tau_1^*)$ a szóbanforgó irracionális szám.

3.Megjegyzés: A periodikus és nem-periodikus esetekre vonatkozó /5.189/ és /5.189'/ formulákat a

$$/5.189''/ \quad \gamma_{12}[\eta_1, t] \approx \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} - \frac{\kappa_2(t) + e_2(t)}{\mu_1(t)} \gamma^{(1)}\gamma^{(2)}$$

közös formulába foglalhatjuk, ahol $e_2(t)$ jelöli a $Q^{(2)}$ job-folyamnak a kezdeti és megszakítások miatti késleltetésén kívüli késleltetéseinek összegét. $e_2(t)=0$ nem-periodikus esetben és $e_2(t)/\mu_1(t) \sim \varepsilon_2/\mu_1$ periodikus esetben.

Az /5.189/ és /5.190/ formulák konstruktívak olyan értelemben, hogy az R_{12}^* -Algoritmus és redukció segítségével a κ_2 , ε_2 , μ_1 , illetve X_j , P_j és φ_j meghatározhatók. Az /5.189'/ és /5.189"/ nem konstruktív formulák, mert $\kappa_2(t)$, $\mu_1(t)$ és $e_2(t)$ meghatározására általában nincs módszerünk.

Mindenesetre az 5.10.Tétel lehetővé teszi bármely konfiguráció R_{12} ütemterve hatékonyságának véges lépésben történő meghatározását, vagy közelítő meghatározását. Ha a γ_{12} hatékonyság ismert, összevethető másfajta ütemtervek hatékonyságával. Kérdés, hogy az egyéb ütemtervek hatékonyságának meghatározásához milyen információkat tudunk felhasználni azok közül, amelyeket γ_{12} kiszámításához már figyelembe kellett venni. Vagyis például γ_{12} és γ_{21} , γ_{12} és γ_{10} meghatározásához milyen kölcsönös információkra van szükség. Ezzel foglalkozik a következő pont.

5.6. A különböző redukciók és prioritásos ütemtervek kapcsolata.

Megvizsgáljuk, hogy egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció ütemterveinek értékeléséhez szükséges eljárások miként függnek össze. Az összefüggő ütemtervekkel kapcsolatban ezt a 4. Fejezetben megtettük már. Most a megszakításos ütemezésekre vonatkozóan vizsgálódunk. Ehhez bizonyos tényeket az összefüggő ütemezéssel kapcsolatos elemzésekből is felhasználunk. Ezek elsősorban a 4.5. pontban vizsgált \mathcal{Q}_1 - és \mathcal{Q}_2 -redukciók kapcsolatára vonatkoznak. Nevezetesen felhasználjuk azt a tényt, hogy egy Q konfiguráció egyszerre \mathcal{Q}_1 - és \mathcal{Q}_2 -redukált. Utalunk a 4.6. Ábrára, ahol a \mathcal{Q} -redukált konfigurációk alterét ábrázoltuk.

A definíciókból nyilvánvaló, hogy bármely Δ_i , $i=1,2$, operátor szerint redukált konfiguráció egyben \mathcal{Q} -redukált is, vagyis a \mathcal{Q}_i , $i=1,2$, operátorok mindegyike szerint is redukált. Vagyis a Δ_i -redukált konfigurációk altere része a \mathcal{Q} -redukált konfigurációk alterének. A Δ_1 -redukált konfigurációk alterét az 5.1. Ábrásor szemlélteti és az alteret az 5.2. Lemma szerint az /5.18/-/5.21/ feltételek határozzák meg. Ha most az 1 és 2 indexeket felcseréljük, akkor a Δ_2 -redukált konfigurációk alterét nyerjük. Könnyű ellenőrizni, hogy a két altér közös része az 5.9. Ábrákon látható, mindkét tengelyirányban vonalkázott tartományok, amelyeket az alábbi feltételek határoznak meg:

$$/5.192/ \quad (\alpha) \quad \tau_1 \tau_2 = 0$$

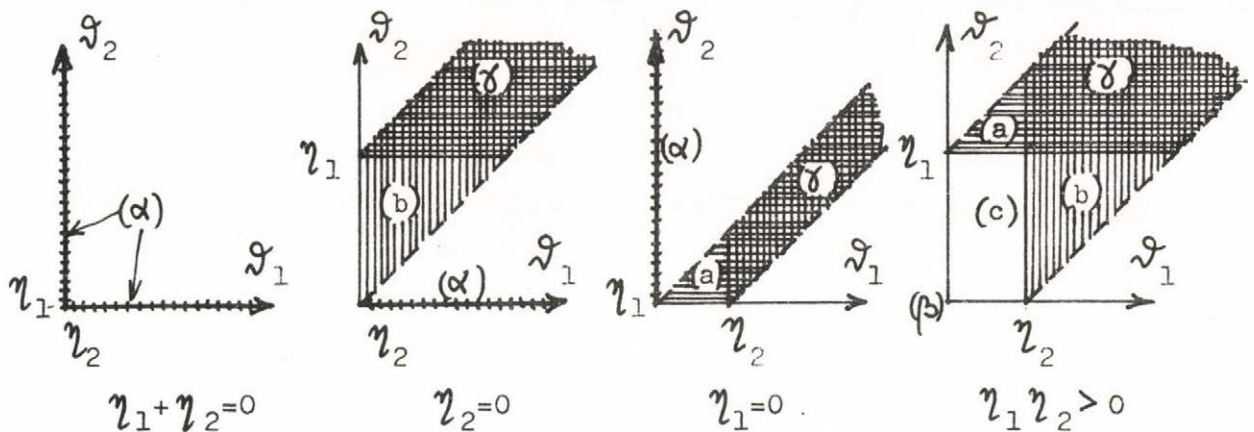
$$/5.193/ \quad (\beta) \quad \eta_1 \eta_2 > 0, \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$$

$$/5.194/ \quad (\gamma) \quad \eta > 0, \quad 0 \leq \eta_1 \leq \vartheta_2 < \tau_1, \quad 0 \leq \eta_2 \leq \vartheta_1 < \tau_2.$$

Az 5.9. Ábrákon a ϑ_i tengelyre merőlegesen vonalkázott tartomány és vastagított egyenes a Δ_i -redukált konfigurációk terét adja meg. A 4.6. Ábrák szerint $\eta_1 \eta_2 > 0$ esetben van olyan tartomány, amely \mathcal{Q} -redukált konfigurációkat tartalmaz, amelyek azonban egyik Δ_i operátor szerint sem redukáltak. Ez a

$$0 \leq \vartheta_1 < \eta_2, \quad 0 \leq \vartheta_2 < \eta_1, \quad \vartheta > 0$$

tartomány, amelyet (c) jelez.



5.9.Ábrák: Δ_i -redukált konfigurációk tartományai

||||| Δ_1 -redukált ===== Δ_2 -redukált

Az 5.9. Ábrákon található tartományokat egyébként a következő feltételek határozzák meg az /5.192/-/5.194/ alatti (α) - (δ) feltételekkel együtt:

/5.195/ (a) $\eta_2 > 0$, $0 \leq \eta_1 \leq \vartheta_2 < \tau_1 < \eta$. Q nem-redukált Δ_1 operátor szerint;

/5.196/ (b) $\eta_1 > 0$, $0 \leq \eta_2 \leq \vartheta_1 < \tau_2 < \eta$. Q nem-redukált Δ_2 operátor szerint;

/5.197/ (c) $\eta_1 \eta_2 > 0$, $\vartheta > 0$, $0 \leq \vartheta_i < \eta_{3-i}$, $i=1,2$. Q nem-redukált Δ_1 és Δ_2 operátorok szerint.

A nem jelölt tartományokon a Q konfiguráció egyik operátor szerint sem redukált. Ha arra alkalmazzuk a \mathfrak{D} -redukciót, akkor egy \mathfrak{D} -redukált $Q^{(*)}$ konfigurációhoz jutunk, amely az (α) - (c) tartományok valamelyikébe esik. Mivel a \mathfrak{D} -redukció változatlanul hagyja az η_1 és η_2 paramétereket, a \mathfrak{D} -redukció az $\underline{\eta} \doteq / \eta_1, \eta_2 /$ számpárok meghatározta $\mathcal{Q}(\underline{\eta})$ altérben /sikban/ hagyja a Q konfigurációt ábrázoló pontot. Vagyis a \mathfrak{D} operátor és a \mathfrak{D} -redukció, mint transzformációk Q-t az $\underline{\eta} = \text{konstans}$ sikban mozgatják.

A 4.6.Lemma szerint bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció véges lépésben redukálható \mathcal{D} szerint, kivéve az $\eta_1 + \eta_2 = 0$ sikot, amelyben a racionálisan független $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ koordinátájú pontok csak megszámlálhatóan végtelen lépésben redukálhatók a $Q=0$ origóra. E különleges eset kivételével véges lépés után bejutunk az $(\alpha) - (c)$ jelű tartományok egyesítése meghatározta \mathcal{D} -redukált altérbe. A 4.Fejezet eredményei szerint az így nyert $Q^{(*)}$ konfiguráció $R_{10}^{(*)}$ ütemterveinek jellemzői könnyen megkaphatók és azokból az eredeti Q konfiguráció R_{10} ütemterveinek jellemzői kiszámíthatók a 4.5.Tétel szerint.

A Q konfiguráció $R_{i,3-i}$ ütemterveinek vizsgálatához bizonyos esetekben további eljárásokat kell végrehajtani. Ezek mibenléte attól függ, hogy $Q^{(*)}$ \mathcal{D} -redukált milyen résztartományban található. Az $(\alpha) - (\delta)$ résztartományokban $Q^{(*)}$ egyben Δ_i -redukált is, $i=1,2$, ezért alkalmazhatók a jelen fejezet, Δ -redukált konfigurációkra vonatkozó eredményei. Ezzel megkapjuk az R_{12} ütemtervre vonatkozó információkat. Ha $\eta_1 < \eta_2, \tau_1^{(*)} < \tau_2^{(*)}$ és $\bar{\tau}_1^{(*)} > \bar{\tau}_2^{(*)}$, akkor az 5.4.pont szerint eshet $Q^{(*)}$ olyan sávba, ahol $R_{12}^{(*)}$ jellemzői kérdésesek. Az R_{21} ütemtervre vonatkozó teljesen analóg információkat úgy kapjuk, ha a fejezet eredményeit a $\bar{Q}^{(*)}$ konjugált konfigurációra alkalmazzuk, vagy minden a $Q^{(1)}$ és a $Q^{(2)}$ job-folyamok sorrendjére utaló indexet átváltoztatunk 1-ről 2-re és viszont. Ebből következik többek között, hogy ha például az R_{12} ütemterv tulajdonságai kérdésesek, mivel $Q^{(*)}$ az 5.4.pontbeli, az 5.7.Ábrán látható sávokba esik, ahol $R_{12}^{(*)}$ jellemzői kérdésesek, biztosan nem következhet be ugyanez a $\bar{Q}^{(*)}$ konjugált konfigurációnál és ezért $R_{21}^{(*)}$ jellemzőinek meghatározása ismeretes. Sőt az 5.13.Lemma bizonyítása szerint ott, ahol $\tau_1^{(*)} < \tau_2^{(*)}$ és $Q^{(*)}$ Δ -redukált, ott $\bar{Q}^{(*)}$ konfigurációra $\bar{\tau}_1^{(*)} > \bar{\tau}_2^{(*)}$, amelyre $R_{12}^{(*)}(\bar{Q}^{(*)})$ jellemzői

$$\bar{\Pi}_{12}^{(*)} = /1;1;0; \frac{\bar{\tau}_1^{(*)} - \bar{\tau}_2^{(*)}}{\bar{\eta}_1} / , \text{ amiből } \Pi_{21}^{(*)} = /1;1;0; \frac{\tau_2^{(*)} - \tau_1^{(*)}}{\eta_2} / ,$$

ahol

$$\Pi_{21}^{(*)} = / \mu_1^{(*)}; \mu_2^{(*)}; \kappa_1^{(*)}; \varepsilon_1^{(*)} /$$

az $R_{21}^{(*)}$ ütemterv jellemzői az 5.1.Tétel szerint.

Az (a) és (b) tartományokban $Q^{(*)}$ redukált az egyik Δ_i operátor szerint, de nem redukált a másik szerint. Ha $Q^{(*)}$ redukált például Δ_2 szerint / (a) tartomány/, akkor $R_{21}^{(*)}$ jellemzői meghatározhatók az 5.3.pont eredményei alapján, hiszen az (a) tartományban $\tau_1^{(*)} < \tau_2^{(*)}$, azaz $\bar{\tau}_1^{(*)} > \bar{\tau}_2^{(*)}$ és a $\bar{Q}^{(*)}$ konjugált konfiguráció R_{12} ütemterve a $Q^{(*)}$ R_{21} ütemtervét szolgáltatja. Kérdéses azonban a $Q^{(*)}$ R_{12} ütemterve, hiszen $Q^{(*)}$ nem redukált Δ_1 szerint. Ha ezt a redukciót azonban végre lehet hajtani, akkor az eredeti Q konfiguráció Δ_1 -redukálható és a $Q^{(*)}$ redukciója éppen a Q Δ_1 -redukáltját szolgáltatja. Ha Q nem Δ_1 -redukálható, akkor $Q^{(*)}$ sem az. Ez az állítás részletesebb indoklást kíván, de következni fog az alábbiakban a Δ -redukció és a \mathfrak{D} -redukció viszonyának elemzéséből. Természetesen, ha $Q^{(*)}$ Δ_1 -redukálható, lehetséges, hogy redukáltja olyan tartományban található, ahol $R_{12}^{(*)}$ tulajdonságai kérdésesek /nem tisztázottak/.

A (c) résztartományban a $Q^{(*)}$ konfiguráció sem Δ_1 , sem Δ_2 szerint nem redukált. Az R_{12} ütemterv elemzéséhez Δ_1 szerint, az R_{21} ütemterv elemzéséhez pedig Δ_2 szerint kellene ezt redukálni, ha egyáltalán lehetséges. Meg fogjuk azonban mutatni, hogy $R_{i,3-i}(Q^{(*)})$ ebben az esetben mindig periodikus és jellemzőit egy közelítési /koincidencia/ feladat megoldása szolgáltatja. Ez azt jelenti, hogy a $Q^{(*)}$ \mathfrak{D} -redukált konfigurációt a (c) résztartományban szükségtelen tovább redukálni bármelyik Δ_i szerint, hiszen az $R_{i,3-i}^{(*)}$ ütemtervének jellemzői enélkül is meghatározhatók. Ezt a következő tétel mutatja.

5.11.Tétel: Ha a $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció \mathfrak{D} -redukált, de egyik Δ_i , $i=1,2$, operátor szerint sem redukált, azaz

$$/5.198/ \quad \eta_1 \eta_2 > 0, \quad 0 < \vartheta_i < \eta_{3-i}, \quad i=1,2,$$

feltételek teljesülnek, akkor $R_{12}(Q)$ és $R_{21}(Q)$ prioritásos ütemtervek egyaránt periodikusak és a

$$\Pi_{i,3-i} \doteq / \mu_1; \mu_2; \kappa_{3-i}; \varepsilon_{3-i} / , \quad i=1,2,$$

jellemzőiket

$$\Pi_{12} = / A; B; A-1; 1 - \frac{\Delta \mathcal{J}_1}{\eta_1} /$$

/5.199/

$$\Pi_{21} = / B; A; A-1; 1 - \frac{\Delta \mathcal{J}_2}{\eta_2} /$$

szolgáltatja, ahol $\Pi_{i,3-i}$ jellemzőknél az

/5.200/ $A, B > 0$ relativ prim egészek

és legkisebb pozitív megoldásai a

/5.201/ $0 \leq B \xi_i - A \leq \alpha_i$

közelítési feladatnak, amelyben

/5.202/ $\xi_i = \frac{\tau_{3-i}}{\mathcal{J}_i}, \quad \alpha_i = \frac{\mathcal{J}_{3-i}}{\mathcal{J}_i},$

és

/5.203/ $\Delta = B \xi_i - A$

a megoldás hibája.

/5.204/ μ_1, μ_2 relativ primek.

Bizonyítás: Az /5.198/ feltételek a $Q^{(1)}$ és $Q^{(2)}$ job-folyamok szempontjából szimmetrikusak, ezért elegendő a bizonyítást - mondjuk - az R_{12} ütemterv vonatkozásában elvégezni. Az /5.199/ is szimmetrikus, csupán a Π_{21} -ben az első két jellemző értéke fordított a Π_{12} -höz képest, mivel a $\Pi_{i,3-i}$ jelölésben mindig μ_1, μ_2 a ciklusszámok sorrendje mindkét ütemtervénél. Tudjuk, hogy az R_{12} ütemtervben egy A_1 -task csak akkor nem okoz megszakítást, ha B_2 -task-kal párhuzamosan indul. Mivel azonban $\mathcal{J}_2 < \eta_1$ az /5.198/ feltétel szerint, ezért egy B_2 -vel párhuzamosan induló A_1 -task feltétlenül B_2 -nél később fejeződik be, ezért utána β_1 -szituáció alakul ki. Ez azt jelenti, hogy R_{12} -ben csak akkor

indulhat B_2 -vel párhuzamosan A_1 -task, ha abban a β_1 -szituáció visszatérő, vagyis periódikus. Ez utóbbi esetben is periódusonként egyetlen A_1 -task indulhat B_2 -vel párhuzamosan, a többi tehát megszakítást okoz. Ez azt jelenti, hogy a megszakítások száma a periódusban

$$\kappa_2 = (\mu_1 - 1),$$

eggyel kisebb, mint a C_1 -ciklusok száma.

A β_1 -szituáció az R_{12} -ben pontosan akkor fog visszatérni, ha valamely C_1 -ciklus B_2 -task-kal párhuzamosan ér véget, vagyis valamely $(\mu_1 > 0)$ egészhez van olyan $(\mu_2 > 0)$ egész, hogy

$$f(C_2, \mu_2) - \eta_2 \leq f(C_1, \mu_1) \leq f(C_2, \mu_2).$$

Az $f(C_2, \mu_2)$ ciklusvégződést abból az információból tudjuk meghatározni, hogy összesen $\mu_1 - 1$ megszakítás késlelteti a kezdeti η_1 nagyságu késleltetésen felül. Vagyis

$$f(C_2, \mu_2) = \mu_2 \tau_2 + \mu_1 \eta_1.$$

Ezt és $f(C_1, \mu_1) = \mu_1 \tau_1$ kifejezést az egyenlőtlenségbe helyettesítve és átrendezve a

$$0 \leq \mu_2 \tau_2 + \mu_1 \eta_1 - \mu_1 \tau_1 \leq \eta_2$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel μ_1, μ_2 a legkisebb egész pár, amelyre ez teljesül, valóban $\mu_2 = B$ és $\mu_1 = A$, ha B, A az /5.201/ egyenlőtlenség legkisebb pozitív megoldása $i=1$ mellett, hiszen az /5.201/ ekvivalens a levezetett egyenlőtlenségünkkel az /5.202/ figyelembevételével. Az R_{12} pontosan akkor periódikus, ha az /5.201/ egyenlőtlenségnek van a kívánt megoldása. A 2.

Fejezet eredményei szerint azonban $\alpha_1 > 0$ miatt ez garantált.

A $\kappa_2 = \mu_1 - 1 = A - 1$ következik levezetésünkéből. Az $\varepsilon_1 = 1 - \Delta \eta_1 / \eta_1$ jellemző-érték következik abból, hogy az /5.203/ jelöléssel a $Q^{(2)}$ job-folyam $\varepsilon_1 \eta_1$ késleltetése az első periódus végén a β_1 -szituáció előtt pontosan $\eta_1 - (f(C_2, \mu_2) - f(C_1, \mu_1)) = \eta_1 - \Delta \eta_1$.

Az /5.200/ következik abból, hogy az /5.201/ legkisebb megoldása a ξ_i -hez közelítő tört nevezője és számlálója a 2. Fejezet szerint, amelyek relatív primek. Ez ekvivalens az /5.204/

állítással.

Q.e.d.

Rátérünk most a Δ_i és \mathfrak{D}_i operátorok viszonyának vizsgálatára. Ehhez elegendő a $\Delta \doteq \Delta_1$ és $\mathfrak{D} \doteq \mathfrak{D}_1$ operátorok viszonyát vizsgálni. A Δ operátor /5.10/-/5.13/ definíciójából látható, hogy az /5.12/ és /5.13/ lépések felcserélhetők. Az is látható, hogy az /5.10/, /5.11/, /5.13/ és $\eta_{2,k+1} = \eta_{2,k}$ definíciók éppen a \mathfrak{D} operátor /4.17/ szerinti definíciójával ekvivalensek.

Definiáljuk most a Q konfigurációtéren a δ operátort a következőképpen:

$$\tilde{Q} \doteq \delta Q \doteq / \tilde{\eta}_1; \tilde{\nu}_1; \tilde{\eta}_2; \tilde{\nu}_2 /,$$

amelynél

$$\tilde{\eta}_1 = \eta_1, \quad \tilde{\nu}_1 = \nu_1, \quad \tilde{\nu}_2 = \nu_2 \quad \text{és}$$

/5.205/

$$\eta_2 = \tilde{k}_2 \nu_1 + \tilde{\eta}_2, \quad \text{ahol}$$

$$/a/ \quad \tilde{k}_2 \geq 0 \text{ egész, } 0 < \tilde{\eta}_2 \leq \nu_1, \text{ ha } \eta_2 \nu_1 > 0$$

$$/b/ \quad \tilde{k}_2 = 0, \quad \tilde{\eta}_2 = \eta_2, \text{ ha } \eta_2 \nu_1 = 0.$$

A δ operátor hatástalan, ha $\tilde{k}_2 = 0$. Ekkor $\tilde{Q} = Q$. A fentiek szerint a Δ operátor nem egyéb, mint a \mathfrak{D} operátor és a δ operátor szorzata /egymásutánja/, vagyis

/5.206/

$$\Delta = \delta \mathfrak{D}.$$

Ennek következménye, hogy

/5.207/

$$\Delta^k Q = (\delta \mathfrak{D})^k Q, \quad k=0,1,\dots$$

A δ és \mathfrak{D} nem felcserélhetők, természetesen, ezért $(\delta \mathfrak{D})^k \neq \delta^k \mathfrak{D}^k$. Ha a δ operátor hatástalan a $\mathfrak{D}Q$ konfigurációra, akkor nyilvánvalóan $\Delta Q = \mathfrak{D}Q$. Azt mondjuk, hogy a Δ operátor manifesztációja most \mathfrak{D} . Formálisan

/5.208/

$$\Delta Q = \delta(\mathfrak{D}Q) = \mathfrak{D}Q, \text{ ha } \delta \text{ hatástalan.}$$

Ez azt jelenti, hogy az /5.207/ operátornál a δ operátor-tényező el is hagyható minden olyan esetben, amikor hatástalan. Azt, hogy δ mikor hatástalan, a Δ operátor generálta (ℓ) hányados-

sorozat $k_{2,k} = 0$ tagjai mutatják.

Tekintsük a

(k) : $k_{2,0}, k_{2,1}, k_{2,2}, \dots, k_{2,r}, \dots$

sorozatot. Definíáljuk az egészek

(v') : v'_0, v'_1, \dots

sorozatát a következőképpen:

/5.209/ $v'_0 = -1, v'_i, i > 0$, az i -edik pozitív $k_{2,r}$ hányados
indexe, ha ilyen van, a (k) sorozatban.

v'_i tag nem létezik, ha i -edik pozitív tag már nincs a (k) sorozatban. A (k) sorozatban a $k_{2,v'_i}, v'_i \in (v')$, tagok pozitívak, a többi tag 0, de itt $i=0$ nem lehet. Ha $|(v')| = 1$, akkor a (v') sorozat az egyetlen $v'_0 = -1$ tagból áll és $(k) = (0)$. A $|(v')|$ hossz véges, ha $|(k)|$ véges /pl. ha a Q Δ -redukálható/, egyébként végtelen. Definíciója szerint nyilvánvaló, hogy

$$-1 \leq v'_0 < v'_1 < v'_2 < \dots \text{ és}$$

/5.210/

$$v'_i \geq i-1,$$

és bármelyik $r \geq 0$ egészhez van egy legnagyobb v'_i , amelyre még $v'_i < r$ teljesül. Jelölje ezt $v'_{h(r)}$. Ez definiálja a

/5.211/ $h(r) = \max \{i: v'_i < r\}, r=0,1,\dots$

függvényt, amely a $k_{2,0}, k_{2,1}, \dots, k_{2,r-1}$ részsorozatban az utolsó pozitív tag sorszámát adja meg, ha ilyen van, egyébként $h(r) = 0$. $h(r)$ egyben e részsorozatbeli pozitív tagok száma. Nyilván $h(0) = 0$. A $v'_{h(r)}$ értéke a részsorozat utolsó pozitív tagjának indexe, ha ilyen van, egyébként $v'_{h(r)} = -1$. Ebből nyilvánvaló, hogy

$$v'_{h(0)} = -1, -1 \leq v'_{h(r)} \leq r-1, r \geq 0.$$

Ha a (k) sorozat $k_{2,k}$ -ig bezárólag csak pozitív tagokat tartalmaz, akkor $h(r) = r$ és $v'_{h(r)} = v'_r = r-1, 0 \leq r \leq k+1$.

A (v') sorozat és a $h(r)$ függvény segítségével egy Δ^r operátor manifesztációját egy konkrét Q konfigurációnál az

alábbi módon is írhatjuk:

$$/5.212/ \quad \Delta^r Q = \mathfrak{D}^{r-1-\nu'_h(r)} \left(\prod_{j=h(r)}^1 \delta \mathfrak{D}^{\nu'_j - \nu'_{j-1}} \right) Q, \quad r \geq 0,$$

sőt $\nu < \infty$ esetén

$$/5.212'/ \quad \Delta^r Q = \mathfrak{D}^{\nu-1-\nu'_h(\nu)} \left(\prod_{j=h(\nu)}^1 \delta \mathfrak{D}^{\nu'_j - \nu'_{j-1}} \right) Q, \quad r \geq \nu,$$

ahol ν a Q konfiguráció Δ -összetettségi foka. Itt a $\prod_{j=h(r)}^1 x_j$

jelölés az operátor-tényezők jobbról-balra haladva növekvő index szerinti sorrendjét jelenti, és $h(r) = 0$ esetén a zárójeles operátor az identitásoperátor.

Az elmondottakat egy példán illusztráljuk az 5.1. Táblázatban. A $Q = / 0; 10087; 14877; 1466 /$ konfiguráció Δ -összetettségi foka $\nu = 10$, véges.

Ha egy $Q' \doteq \mathfrak{D}Q$ konfigurációra a δ operátor hatásos, az azt jelenti, hogy $0 < \nu'_1 < \nu'_2$ és, mivel a \mathfrak{D} operátor alkalmazása után $\nu'_2 < \tau'_1$ is teljesül, ezért a Q' konfiguráció \mathfrak{D} -redukált. Az 5.1. Táblázatban hullámosan aláhúztuk a \mathfrak{D} -redukált konfigurációkat. Megállapításunk azt jelenti, hogy egy Δ -redukció \mathfrak{D} -redukciók és δ -operációk váltakozó sorozatából áll. A sorozat lehet

üres, ha Q Δ -redukált, és

kezdődhet

\mathfrak{D} -redukcióval, ha Q nem \mathfrak{D} -redukált és

δ -operációval, ha Q \mathfrak{D} -redukált.

A sorozat lehet

végtelen, ha Q nem Δ -redukálható, vagy

végződik

\mathfrak{D} -redukcióval, vagy

δ -operációval is.

E körülmények feltételét az (ℓ) hányados-sorozat segítségével fejezhetjük ki, de ezt nem részletezzük.

5.1. Táblázat: Példa a Δ^k operátorok manifesztációjára.

r	$Q_r = \Delta^r Q$				$\mathfrak{D}Q_r = \mathfrak{D} \Delta^r Q$				$\ell_{1,r}$	$\ell_{2,r}$	$k_{2,r}$	v_r	$h(r)$	$v_{h(r)}$	$v_{r-1} - v_{h(r)}$	$v_r - v_{r-1}$	$\Delta^r Q$
0	0	10087	14877	1466	0	10087	14877	1466	0	0	1	-1	0	-1	0	-	$IQ = Q_{v'_0+1}$
1	0	10087	4790	1466	0	3831	4790	1466	1	0	1	0	1	0	0	1	$\delta \mathfrak{D}Q = Q_{v'_1+1}$
2	0	3831	959	1466	0	1406	959	60	1	1	0	1	2	1	0	1	$\delta \mathfrak{D} \delta \mathfrak{D}Q = Q_{v'_2+1}$
3	0	1406	959	60	0	387	959	60	1	0	2	3	2	1	1	2	$\mathfrak{D}(\delta \mathfrak{D})^2 Q$
4	0	387	185	60	0	142	185	60	1	0	1	4	3	3	0	1	$\delta \mathfrak{D}^2(\delta \mathfrak{D})^2 Q = Q_{v'_3+1}$
5	0	142	43	60	0	39	43	21	1	1	1	5	4	4	0	1	$\delta \mathfrak{D} \delta \mathfrak{D}^2(\delta \mathfrak{D})^2 Q = Q_{v'_4+1}$
6	0	39	4	21	0	14	4	7	1	1	0	7	5	5	0	2	$(\delta \mathfrak{D})^2 \delta \mathfrak{D}^2(\delta \mathfrak{D})^2 Q = Q_{v'_5+1}$
7	0	14	4	7	0	3	4	1	1	2	1	-	5	5	1	-	$\mathfrak{D}(\delta \mathfrak{D})^2 \delta \mathfrak{D}^2(\delta \mathfrak{D})^2 Q$
8	0	3	1	1	0	1	1	0	1	1	0	-	6	7	0	-	$\delta \mathfrak{D}^2(\delta \mathfrak{D}^2(\delta \mathfrak{D})^2)^2 Q = Q_{v'_6+1}$
9	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	-	6	7	1	-	$\mathfrak{D}(\delta \mathfrak{D}^2(\delta \mathfrak{D})^2)^2 Q$
10	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	-	6	7	2	-	$\mathfrak{D}^2(\delta \mathfrak{D}^2(\delta \mathfrak{D})^2)^2 Q = Q_{v'_7+1}$
11	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	-	6	7	2	-	$\mathfrak{D}^2(\delta \mathfrak{D}^2(\delta \mathfrak{D})^2)^2 Q = Q_{v'_8+1}$

Legyen a (v^j) sorozat hossza $|(v^j)| = J$. Ekkor véges J esetén az utolsó eleme v_{J-1}^j . Ilyenkor egészítsük ki a sorozatot egy v_J^j elemmel, amely legyen az (ℓ) hányados-sorozat utolsó pozitív tagjának indexe. Nyilván $v_J^j \geq v_{J-1}^j$ és $v_J^j = v_{J-1}^j$ akkor, ha $k_{2,v-1} > 0$ az (ℓ) sorozat utolsó /vagy utolsó előtti/ pozitív tagja, ahol v a Q konfiguráció Δ -összetettségi foka. Egyébként $v_J^j = v - 1$ mindig igaz, bármely v összetettségi foknál. Definiáljuk most a kiegészített (v^j) sorozat segítségével a

$$v_j = v_j^j - v_{j-1}^j, \quad j=1,2,\dots,J,$$

egész-sorozatot. Az /5.212'/ szerint, ha Q -nak létezik Q^* Δ -redukáltja, akkor v_J véges és

$$/5.213/ \quad Q^* \doteq \Delta^v Q = \mathfrak{d}^{v_J} \left(\prod_{j=J-1}^1 \delta \mathfrak{d}^{v_j} \right) Q \doteq Q_v,$$

és ha Q -nak nem létezik Δ -redukáltja, de $|(v^j)| = J$ véges, akkor

$$/5.213'/ \quad Q_v \doteq \Delta^v Q = \mathfrak{d}^{v-v_{J-1}} \left(\prod_{j=J-1}^1 \delta \mathfrak{d}^{v_j} \right) Q, \quad v \geq v_{J-1}.$$

A Q konfiguráció \mathfrak{d} -redukáltja nem egyéb, mint

$$/5.214/ \quad Q^{(*)} = \mathfrak{d}^{v_1} Q = \mathfrak{d}^{v_1^j+1} Q = Q_{v_1^j+1}.$$

A $Q_0 \doteq Q$ konfigurációból kiindulva definiálhatjuk a \mathfrak{d} -redukált konfigurációk

$$/5.215/ \quad Q^{(1)} = \mathfrak{d}^{v_1} Q_0, \quad Q^{(j)} = \mathfrak{d}^{v_j} \delta Q^{(j-1)}, \quad j=2,\dots,J, \text{ ha } J \geq 2,$$

sorozatát. Ennek utolsó tagja $Q^{(J)}$ nem létezik, ha J végtelen, vagy v_J végtelen, és $Q^{(J)}$ egyben Δ -redukált is, ha v_J^j véges. Ilyenkor

$$/5.216/ \quad Q^{(*)} = Q^{(1)} \quad \text{és} \quad Q^* = Q^{(J)}, \text{ ha } v_J \text{ véges.}$$

A $\delta Q^{(j)}$ konfigurációk $j < J$ esetén nem \mathfrak{D} -redukáltak, kivéve a $\delta Q^{(J-1)}$ konfigurációt, ha $v_J' = v_{J-1}'$. Azonban

$$/5.217/ \quad \delta Q^{(j)} = Q_{v_{j+1}'} = \Delta^{v_{j+1}'} Q, \quad j=1,2,\dots,J-1.$$

A $Q_{v_{j+1}'} = Q_0 \doteq \Delta^0 Q \doteq Q$ figyelembevételével mondhatjuk, hogy

$$Q^{(j+1)} \text{ a } \delta Q^{(j)} = Q_{v_{j+1}'} \text{ konfiguráció } \mathfrak{D}\text{-redukáltja, } j=0,\dots,J-1.$$

Ennek megfelelően az (ℓ) hányados-sorozat strukturája

$$(\ell^{(1)}), k_{2,v_1'}, (\ell^{(2)}), k_{2,v_2'}, \dots, k_{2,v_{J-1}'}, (\ell^{(J)}),$$

amelyben $(\ell^{(j)}), j=1,\dots,J$, egy-egy \mathfrak{D} -redukció generálta hányados-sorozat.

A Δ - és \mathfrak{D} -redukció most feltárt kapcsolata - érdekességén túlmenően - igazolja azt a korábban kihasznált állításunkat, hogy egy Q konfiguráció $Q^{(*)}$ \mathfrak{D} -redukáltjával kezdődik a Δ -redukció is, vagyis a $Q^{(*)}$ Δ -redukáltja ugyanaz, mint a Q Δ -redukáltja. A Δ - és \mathfrak{D} -redukciók kapcsolata segítene az összefüggő és megszakításos ütemezések jellemzőinek összevetésében és a hatékonysági viszonyok feltárásában. Ennek elemzésére nem térünk ki.

Irodalom

- [A4] Arató Mátyás: Diffusion approximation for multiprogrammed computer systems. Comp. et Math. with Appl. 1., Pergamon Press, 1975, 315-26 o.
- [K10] Knuth, D.E.: The Art of Computer Programming. Vol.1: Fundamental Algorithms. Addison-Wesley, 1968
- [K11] Kupiers, L., Niederreiter, H.: Uniform Distribution of Sequences. Wiley, 1974
- [P4] Perron, Oskar: Die Lehre von den Kettenbrüchen. 1. Bd.: Elementare Kettenbrüche. Teubner, Stuttgart, 1954
- [T6] Tomkó József: Processor utilization study. Comp. et Math. with Appl. 1., Pergamon Press, 1975, 337-44 o.
- [T7] Tankó József: Szabályos job-folyam párok ütemezésének vizsgálata I. Tanulmányok 82/1978, MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Budapest, 1978

A T A N U L M Á N Y O K sorozatban 1978-ban megjelentek:

- 73/1978 S.A.COONS: Homogeneous coordinates, projective transformations, and conics
- 74/1978 Wolfgang Franke: Vorträge über das Graphische Display GD'71
- 75/1978 Vaskövi István - Galbavy Márta: Anyagszétválasztási rendszerek tervezésének és optimális üzemeltetésének általános megközelítése
- 76/1978 Somló János - Nagy Judit: Módszerek munkadarabok forgácsoló megmunkálási folyamatának optimalizálására
- 77/1978 Szászné Turchányi Piroska: Optimalizálási feladatok csomagkapcsolt számítógéphálózatok tervezésénél
- 78/1978 Darvas Péter - Gallai István - Hosszu Péter - Krammer Gergely: Papers of Computer Graphics
- 79/1978 Dr Adolf Kotzauer: Beschriftung und Bemassung von automatisch erstellen zeichnungen unter Benutzung des graphisches Dialogs
- 80/1978 Prékopa András: Studies in applied stochastic programming I. /Cikkgyűjtemény/
- 81/1978 Peter Bonitz: Ein Beitrag zur Theorie des Entwurfs doppelt gekrümmter Flächen unter differentialgeometrischen und rechentechnischen Aspekten
- 82/1978 Tankó József: Szabályos job-folyam párok ütemezésének vizsgálata I.

/Technikai akadályok miatt 1979-ben jelenik meg/

- 83/1978 Tankó József: Szabályos job-folyam párok
ütemezésének vizsgálata I.
/Technikai akadályok miatt 1979-ban jelenik meg/
- 84/1978 Bányász Csilla - Keviczky László: Discrete time
identification of linear dynamic process
- 85/1978 Dr Hoffmann Péter: Számítógépes szerszámgépvezér-
lés egy alkatrészprogramozási módszere
- 86/1978 Ruda Mihály: A SIS77 Statisztikai Információs
Rendszer kialakításának szempontjai, alkalmazásá-
nak és továbbfejlesztésének lehetőségei
- 87/1978 Téli iskola
- 88/1978 Gaál Balázs - Hermann Gyula - Horváth László -
Renner Gábor - Várady Tamás: Szoborszerű felületek
tervezése és megmunkálása

1979-ben eddig megjelentek:

- 88/1979 Gaál Balázs - Hermann Gyula - Horváth László -
Renner Gábor - Várady Tamás: Szoborszerű felületek
tervezése és megmunkálása
- 89/1979 Ruda Mihály: A SIS77 statisztikai információs
rendszer
- 90/1979 Bányász Csilla - Keviczky László: Optimum
insensitivity of the discrete-continuous
transformation /megjelenés előtt/
- 91/1979 Mikroprocesszorok és mikroprocesszor-bázisu
rendszerek architektúrája és strukturája
- Téli iskola, Szentendre -

